Действия с матрицами

Основные определения

Матрицей размера $n \times m$ называется совокупность $n \cdot m$ чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из n строк и m столбцов и заключенной в скобки:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Элементы матрицы a_{ij} имеют два индекса, которые указывают на положение элемента в таблице A. Первый i указывает строку, второй j – столбец, на пересечении которых находится элемент. Используется и сокращенное обозначение матрицы: $A = (a_{ij})$.

Матрица, состоящая из одной строки $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$, называется *матрицей-строкой* (или *вектор-строкой*). Матрица, состоящая из одного столбца $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, называется *матрицей-столбцом* (или *вектор-столбцом*).

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* O. В частности, рассматривают нулевые строки и нулевые столбцы.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, матрица называется *квадратной*. При этом число ее строк (столбцов) называется *порядком* квадратной матрицы.

В квадратной матрице особо выделяют *главную диагональ* и *побочную диагональ*. Главная диагональ состоит из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Элементы побочной диагонали - $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$. Сумма элементов на главной диагонали называется *следом* матрицы и обозначается $\operatorname{tr} A$:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Можно выделить некоторые специальные виды квадратных матриц:

1. Матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$, у которой все элементы кроме диагональных равны нулю, называется *диагональной*.
2. Если в диагональной матрице $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, то она называется *скалярной*.
3. Скалярная матрица, у которой диагональные элементы равны 1, называется *единичной*. Единичную матрицу обозначают символом E:
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю, называют *верхней треугольной*. Если равны нулю все элементы выше главной диагонали – *нижней треугольной*.
5. Если элементы матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, одинаковы, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, то матрицу называют *симметричной*.

Арифметические операции над матрицами

Матрицы A и B считаются равными, если они имеют одинаковые размеры (n×m) и все элементы a_{ij} матрицы A совпадают с соответствующими элементами b_{ij} матрицы B:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

I. Сложение матриц

Суммой матриц $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ с одинаковыми размерами называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)$, элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$.

Складывать можно лишь матрицы с одинаковыми размерами. При этом сумма будет матрицей с теми же размерами.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

II. Умножение матрицы на скаляр

Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ *на число* α называется матрица C, элементы которой определяются равенством $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Обозначение: $C = \alpha A$ или $C = A\alpha$. Ясно, что размеры матриц A и αA одинаковы.

Матрица $(-1)A$ записывается обычно как $-A$ и называется матрицей, *противоположной* матрице A.

Легко проверить, что приведенные выше операции обладают следующими свойствами:

$$A + B = B + A \text{ (переместительный закон)},$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ (сочетательный закон)},$$

$$\alpha A = A\alpha \text{ (по определению)},$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A),$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B,$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

III. Вычитание матриц

Операция вычитания матриц вводится как действие, обратное сложению. *Разностью матриц* $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ с одинаковыми размерами называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

IV.Умножение матриц

Под *произведением* матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ понимается матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

Произведение матриц A и B будет существовать, если количество столбцов матрицы A будет совпадать с количеством строк матрицы B.

Символически условия на размеры перемножаемых матриц и размер матрицы, полученной в результате перемножения, можно записать следующим образом:

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{m}] \cdot [\mathbf{m}\times\mathbf{p}] = [\mathbf{n}\times\mathbf{p}]$$

Во множестве квадратных матриц n-го порядка произведение матриц всегда существует и определяет матрицу того же порядка.

Примеры:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$ $[2\times4]\cdot[4\times2] = [2\times2]$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 4 & 11 & -15 & 22 \end{pmatrix}$$ $[4\times2]\cdot[2\times4] = [4\times4]$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$ $[2\times3]\cdot[3\times1] = [2\times1]$

Свойства умножения матриц

1°. В общем случае произведение матриц A и B *не коммутативно*, т.е. $A\cdot B \neq B\cdot A$, даже если произведения AB и BA существуют. Свойство подтверждают примеры 1) и 2), рассмотренные выше.

Однако существуют квадратные матрицы, для которых свойство коммутативности имеет место. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2°. Если A – квадратная матрица порядка n, то AE=EA=A, где E – единичная матрица порядка n.

Единичная матрица коммутативна с любой квадратной матрицей той же размерности.

3°. (AB)C = A(BC) (*ассоциативность*).

Доказательство. Если матрица A имеет размерность $n \times s$, матрица B - $s \times m$, C - $m \times p$, то произведения матриц (AB)C и A(BC) существуют и являются матрицами размерности $n \times p$. Обозначим D=AB, T=BC, U=(AB)C и V=A(BC). Покажем, что U=V.

Для элементов матрицы U имеем:

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{m} d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{s} a_{ir} b_{rk} \right) c_{kj} = \sum_{r=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{rk} c_{kj} \right) a_{ir} = \\ = \sum_{r=1}^{s} a_{ir}\, t_{rj} = v_{ij}.$$

Выполняя преобразование, был изменен порядок суммирования. Это возможно, так как обе суммы содержат конечное число слагаемых. В результате получили, что соответствующие элементы матриц U и V равны, и, следовательно, U=V. А значит, (AB)C=A(BC).

4°. Для умножения матриц имеет место распределительный закон:

а) (A + B)C = AC + BC,

б) C(A + B) = CA + CB,

при условии, что существует левые и правые части равенств.

Доказательство. а) Если матрицы A и B имеют размеры $n \times s$, а матрица C – размеры $s \times m$, то произведение матриц (A + B)C и сумма матриц AC + BC существуют и являются матрицами размера $n \times m$.

Обозначим $D=(A+B)C$, $U=AC$, $V=BC$. Покажем, что $D=U+V$. Для элементов матрицы D имеем:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{s} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{s} b_{ik}c_{kj} = u_{ij} + v_{ij}.$$

Отсюда заключаем, что $D=U+V$, и, следовательно, справедлив распределительный закон а). Пункт б) доказывается аналогично.

Докажите справедливость равенства из пункта б) свойства 4°.

Матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице A, называется матрица A^T, элементы которой $a_{ji}^T = a_{ij}$. При этом строки матрицы A^T состоят из элементов соответствующих столбцов матрицы A. Очевидно, количество строк (столбцов) транспонированной матриц равно количеству столбцов (строк) исходной матрицы.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить справедливость следующих **свойств операции транспонирования**:

1) Если матрицы A и B имеют одинаковые размеры, то $\forall \alpha, \beta \in R$ $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$;
2) $(A^T)^T = A$;
3) Если существует произведение матриц A и B, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Докажите справедливость свойств 1) и 2).

Докажем третье свойство операции транспонирования. Пусть матрица A имеет размеры $n \times s$, матрица B - $s \times m$. Обозначим $C = AB$. Матрица C имеет размеры $n \times m$, а транспонированная матрица C^T – размеры $m \times n$. Для элементов матрицы C^T имеем:

$$c_{ji}^T = c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

С другой стороны, матрицы B^T и A^T имеют размеры $m \times s$ и $s \times n$ соответственно, и

$$b_{jk}^T = b_{kj}, \quad a_{ki}^T = a_{ik}, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \ k = 1, 2, \ldots, s; \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим $D = B^T A^T$. Матрица D имеет размеры $m \times n$ и для ее элементов имеем:

$$d_{ji} = \sum_{k=1}^{s} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{s} b_{kj} a_{ik} = c_{ji}^T, \ \ j = 1, 2, \ldots, m; \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из равенства элементов матриц D и C^T следует $C^T = D$. Таким образом, $(AB)^T = B^T A^T$.

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974
2. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
3. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.