Системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \; a_{12}x_2 & + \; \ldots + \; a_{1n}x_n & = \; b_1, \\ a_{21}x_1 & + \; a_{22}x_2 & + \; \ldots + \; a_{2n}x_n & = \; b_2, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + \; a_{m2}x_2 & + \; \ldots + \; a_{mn}x_n & = \; b_m, \end{cases} \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Теорема 1 (Кронекера - Капелли). *Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ была совместна (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг* *основной матрицы A системы (5) и ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ системы (5) были равны, т. е.* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r$. *Если* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r$ *и $r = n$, то система (5) имеет единственное решение; если $r < n$, то система (5) имеет бесконечное множество решений, зависящее от $n - r$ произвольных параметров.*

Система (5) называется *однородной*, если все ее свободные члены b_j, $j = 1, \ldots m$ равны нулю. Если хотя бы одно из чисел отлично от нуля, то система называется *неоднородной*. Для однородной системы уравнений $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$, поэтому она всегда совместна.

Матричный метод решения систем уравнений. Пусть в системе (5) $m = n$ и $|A| \neq 0$. Тогда для A существует единственная обратная матрица A^{-1}. Рассмотрим матрицы-столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Тогда систему (5) можно записать в матричной форме: $AX = B$. Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$, откуда $EX = X = A^{-1}B$. Итак, $X = A^{-1}B$.

Формулы Крамера. Если в системе (5) $m = n$ и $|A| \neq 0$, то верны формулы Крамера для вычисления неизвестных x_i, $(i = 1, \ldots, n)$:

$$x_i = \frac{\triangle_i}{\triangle} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\triangle = |A|$, а $\triangle_i$ — определители n-го порядка, которые получаются из $\triangle$ заменой в нем i-го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Метод последовательных исключений Гаусса. Если основная матрица A системы (5) имеет ранг $r \leqslant n$, то расширенная матрица $\overline{A}$ этой системы с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов всегда может быть приведена к виду

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1r+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2r+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{rr+1} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_m
\end{array}\right).$$

Полученная система уравнений имеет те же решения, что и исходная.

Пример 1. Дана неоднородная линейная система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$$

Проверить, совместна ли система и, в случае совместности, решить ее: а) матричным методом; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса.

Решение. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Система совместна, поскольку $|A| = -6$, а тогда $\operatorname{rank} A = 3 = \operatorname{rank} \overline{A}$.

а) *Матричный метод.* Обратная матрица:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, т. е. $x = 1$, $y = -3$, $z = -1$ – решение данной системы.

б) *По формулам Крамера.* Имеем $\triangle = |A| = -6$. Последовательно заменив в $\triangle$ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 18,\ \triangle_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$x = \frac{\triangle_1}{\triangle} = 1,\ y = \frac{\triangle_2}{\triangle} = -3,\ z = \frac{\triangle_3}{\triangle} = -1.$$

в) Составим расширенную матрицу $\overline{A}$ и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&2&3\\1&1&2&-4\\4&1&4&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-4\\2&-1&2&3\\4&1&4&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-4\\0&-3&-2&11\\0&-3&-4&13\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-4\\0&-3&-2&11\\0&0&2&-2\end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases}x+\ \ y+2z=-4,\\ \quad -3y-2z=11,\\ \qquad\qquad 2z=-2.\end{cases}$$

Из нее последовательно находим: $z=-1$, $y=-3$, $x=1$. □

Пример 2. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-3x_2+4x_3=0,\\4x_1-11x_2+10x_3=0.\end{cases}$$

Решение. Так как $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&4\\4&-11&10\end{vmatrix}=0$, то система имеет бесконечно много решений. Поскольку $\operatorname{rank}A=2$, $n=3$, то возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение. Имеем

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-3x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (можно брать и другие пары неизвестных) и перенесем слагаемые с x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3,\\2x_1-3x_2=-4x_3.\end{cases}$$

Решим последнюю систему по формулам Крамера:

$$\triangle=\begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}=-5, \triangle_1=\begin{vmatrix}-\ x_3&1\\-4x_3&-3\end{vmatrix}=7x_3,\ \triangle_2=\begin{vmatrix}1&-\ x_3\\2&-4x_3\end{vmatrix}=-2x_3,$$

$$x_1=\frac{\triangle_1}{\triangle}=-\frac{7}{5}x_3,\ x_2=\frac{\triangle_2}{\triangle}=\frac{2}{5}x_3$$

Полагая $x_3=k$, где k – произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение исходной системы: $x_1=-7/5\,k$, $x_2=2/5\,k$, $x_3=k$. □