КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 по теме:

«Матрицы. Определители»

1°. *Матрицей* $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В случае, если $m = n$, то матрица называется *квадратной* n-го порядка. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица E, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а все остальные элементы матрицы равны 0, называется *единичной*. Матрица O, все элементы, которой равны 0, называется *нулевой*.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times r$ на матрицу $B = (b_{jk})$ размера $r \times n$ называется матрица $C = (c_{ik})$ размера $m \times n$ с элементами

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_{jk}.$$

Из определения следует, что произведение двух матриц существует тогда и только тогда, когда **число столбцов в первой матрице совпадает с числом строк во второй матрице**. В общем случае умножение матриц зависит от порядка сомножителей, т. е. $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными*.

Транспонированием матрицы A называется действие, при котором каждая ее строка заменяется столбцом с тем же номером, и обозначается A^T.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Элементарными преобразованиями матрицы называется любая из следующих операций: а) перестановка столбцов (строк); б) умножение столбца (строки) на число, отличное от нуля; в) прибавление к элементам какого-либо столбца (строки) соответствующих элементов другого столбца (строки), умноженных на число; г) отбрасывание столбца (строки), целиком состоящего из нулей.

Матрицы, переходящие друг в друга в результате конечного числа элементарных преобразований, называются *эквивалентными*.

Говорят, что матрица, содержащая m строк и n столбцов, имеет *диагональную форму*, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов a_{11},

…, a_{rr} (где $1 \leqslant r \leqslant \min(m,n)$). Любая матрица A может быть приведена к диагональной форме путем элементарных преобразований.

Определителем матрицы второго порядка (или *определителем второго порядка*) называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Определитель обозначают символом $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ или $\det A$.

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{1}$$

Определителем матрицы третьего порядка (или *определителем третьего порядка*) называется число

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Применяя правило вычисления определителя второго порядка, перепишем формулу (2) в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{3}$$

Вычисление определителя третьего порядка по последней формуле называется правилом треугольников.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получаемый из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Например, минором M_{12} элемента a_{12} является $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Например, алгебраическое дополнение A_{11} элемента a_{12} равно $(-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$. Таким образом, алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента могут отличаться только знаком.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения. Так, например, $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ – разложение определителя третьего порядка по элементам первой строке.

Аналогично, используя разложение по элементам строки (столбца), с помощью определителей третьего порядка можно ввести понятие определителя четвертого порядка и т. д. Определения минора и алгебраического дополнения элемента a_{ij} остаются в силе для определителя любого порядка.

Таким образом, *алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца и умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Определитель матрицы A n-го порядка можно найти по следующему правилу: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, где $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ – алгебраические дополнения элементов i-ой строки матрицы A.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A n-го порядка ($|A| \neq 0$), если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Элементы a_{ij}^{-1} обратной матрицы вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|A|}, \tag{4}$$

где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A, $|A|$ – ее определитель.

Матрица A имеет *ранг* r ($\operatorname{rank} A = r$), если среди ее миноров существует хотя бы один минор порядка r, отличный от нуля, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю или не существуют. Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Ранг матрицы можно найти, например, *методом элементарных преобразований*. Этот метод основан на том факте, что элементарные преобразования не меняют ее ранга. Используя эти преобразования можно матрицу A привести к диагональной форме, когда все элементы, кроме $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ ($r \leqslant \min(m, n)$), равны нулю. Тогда $\operatorname{rank} A = r$.

Пример 1. Даны матрицы A, B, C. 1) Найти произведения матриц $M = A{\cdot}B$ и $N = B{\cdot}A$. 2) Найти матрицу D по заданному условию. 3) Вычислить определитель матрицы A: а) способом разложения определителя по элементам какого либо столбца или какой либо строки; б) по правилу треугольников. 4) Найти ранг матрицы C. 5) Найти матрицу, обратную матрице B.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ D = B^2 - 2A.$$

Решение. 1) Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot1+5\cdot3+4\cdot2 & 3\cdot0+5\cdot1+4\cdot1 & 3\cdot3+5\cdot7+4\cdot8 \\ -3\cdot1+0\cdot3+1\cdot2 & -3\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 & -3\cdot3+0\cdot7+1\cdot8 \\ 5\cdot1+6\cdot3-4\cdot2 & 5\cdot0+6\cdot1-4\cdot1 & 5\cdot3+6\cdot7-4\cdot8 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 26 & 9 & 76 \\ -1 & 1 & -1 \\ 15 & 2 & 25 \end{pmatrix}$.

Аналогично

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1\cdot3+0\cdot(-3)+3\cdot5 & 1\cdot5+0\cdot0+3\cdot6 & 1\cdot4+0\cdot1+3\cdot(-4) \\ 3\cdot3+1\cdot(-3)+7\cdot5 & 3\cdot5+1\cdot0+7\cdot6 & 3\cdot4+1\cdot1+7\cdot(-4) \\ 2\cdot3+1\cdot(-3)+8\cdot5 & 2\cdot5+1\cdot0+8\cdot6 & 2\cdot4+1\cdot1+8\cdot(-4) \end{pmatrix}.$$

Итак, $N = B \cdot A = \begin{pmatrix} 18 & 23 & -8 \\ 41 & 57 & -15 \\ 43 & 58 & -23 \end{pmatrix}$.

2) Найдем матрицу $D = B^2 - 2A$.

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 27 \\ 20 & 8 & 72 \\ 21 & 9 & 77 \end{pmatrix}.$$

$$2A = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \\ -6 & 0 & 2 \\ 10 & 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$D = B^2 - 2A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 27 \\ 20 & 8 & 72 \\ 21 & 9 & 77 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \\ -6 & 0 & 2 \\ 10 & 12 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 19 \\ 26 & 8 & 70 \\ 11 & -3 & 85 \end{pmatrix}.$$

3) а) Найдем $|A|$ методом разложения по элементам второй строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+3}{\cdot}1{\cdot}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3{\cdot}(5{\cdot}(-4)-4{\cdot}6)+0{\cdot}(3{\cdot}(-4)-4{\cdot}5)-1{\cdot}(3{\cdot}6-5{\cdot}5) = -125.$$

б) Воспользуемся формулой (3). Тогда $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot (-4) + 4 \cdot$ $\cdot(-3) \cdot 6 + 5 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) \cdot (-4) = -125$.

4) Матрица C порядка 3×4, следовательно, ее ранг не может быть больше 3. Имеется определитель третьего порядка отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 63 \implies \operatorname{rank} A = 3.$$

5) Найдем матрицу, обратную матрице B. Определитель матрицы $|B| = 4 \neq 0$, следовательно, матрица B имеет обратную. Далее находим алгебраические дополнения:

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 1, B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -10, B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3, B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2, B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -3, B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2, B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $B^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & -3/4 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Имеем $B^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & -3/4 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Пример 2. Найти матрицу X из матричного уравнения: $AXB - A^2 = C$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Решение матричного уравнения имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot (C + A^2) \cdot B^{-1}.$$

Найдем определители матриц A и B: $|A| = 2$, $|B| = 6$. Так как определители отличны от нуля, то для этих матриц существуют обратные. Элементы обратных матриц найдем по формуле (4). Получим

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $A^{-1} \cdot (C + A^2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,
$X = A^{-1} \cdot (C + A^2) \cdot B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$. □

$\triangle_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6$, $\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 18$, $\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6$,
$x = \frac{\triangle_1}{\triangle} = 1$, $y = \frac{\triangle_2}{\triangle} = -3$, $z = \frac{\triangle_3}{\triangle} = -1$.