

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Петрозаводский государственный университет

Институт математики и информационных технологий  
Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ К.Г. Тарасов

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

Направление подготовки бакалавриата  
09.03.02 Информационные системы и технологии

Профиль направления подготовки бакалавриата  
«Разработка информационных систем»

Форма обучения заочная

Петрозаводск  
2021

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с ФГОС ВО, утвержденным приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 19.09.2017 № 926 (с изменениями от 08.02.2021 № 83, от 26.11.2020 № 1456) и учебным планом по направлению подготовки бакалавриата 09.03.02 Информационные системы и технологии (профиль «Разработка информационных систем»).

Разработчик:

*Семёнова Елена Евгеньевна* доцент кафедры математического анализа института математики и информационных технологий, канд. физ.-мат. наук, доцент

\_\_\_\_\_ (подпись)

Эксперт:

*Клюкина Елена Александровна*, доцент кафедры теории вероятностей и анализа данных института математики и информационных технологий, канд. тех. наук, доцент

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа

Протокол № 9 от «14» мая 2021 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ В.В. Старков, доктор физ.-мат. наук, профессор

СОГЛАСОВАНО:

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и утверждена на заседании учебно-методической комиссии института математики и информационных технологий

Протокол № \_\_\_\_ от «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Директор института \_\_\_\_\_ Н.Ю. Светова, канд. физ.-мат. наук, доцент

Начальник методического отдела учебно-методического управления ПетрГУ \_\_\_\_\_ И.В. Маханькова

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) бакалавриата**

1.1. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины и индикаторы достижения компетенций:

<b>Код компетенции. Этап формирования компетенции</b>	<b>Формулировка компетенции</b>	<b>Индикаторы достижения компетенции</b>
УК-1 начальный	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<p><b>УК-1.1.</b> Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие. Осуществляет декомпозицию задачи.</p> <p><b>УК-1.2.</b> Находит и критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи.</p> <p><b>УК-1.3.</b> Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки.</p> <p><b>УК-1.4.</b> Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки. Отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок и т.д. в рассуждениях других участников деятельности.</p> <p><b>УК-1.5.</b> Определяет и оценивает практические последствия возможных решений задачи.</p>
ОПК-1 начальный	Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	<p><b>ОПК-1.1.</b> Знает основные понятия и методы базовых естественнонаучных и инженерных дисциплин.</p> <p><b>ОПК-1.2.</b> Знает методы математического анализа и моделирования объектов профессиональной деятельности.</p> <p><b>ОПК-1.3.</b> Умеет применять методы решения типовых задач из различных разделов математики для исследования математических объектов и моделей,</p> <p><b>ОПК-1.4.</b> Умеет выбирать адекватный метод решения задачи, оценивать сложность ее решения.</p> <p><b>ОПК-1.5.</b> Владеет методами построения математических моделей и содержательной интерпретации полученных результатов.</p> <p><b>ОПК-1.6.</b> Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования математических объектов и моделей.</p>

1.2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

*Знать:*

- основные понятия, методы, теоретические и вычислительные аспекты линейной алгебры (определение матрицы, виды матриц, свойства операций над матрицами; определение обратной матрицы, свойства обратной матрицы; понятие о ранге матрицы; понятие об определителе матрицы, свойства определителей; общий вид систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ); критерий совместности СЛАУ; методы решения СЛАУ (метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса)).

*Уметь:*

- использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- применять методы линейной алгебры для решения инженерных задач.

*Владеть:*

- навыками самостоятельной работы с учебной и учебно-методической литературой;
- навыками оформления решения типовых задач линейной алгебры;
- навыками применения методов линейной алгебры для решения профессиональных задач.

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата и язык преподавания**

Дисциплина «Линейная алгебра» входит в обязательную часть учебного плана основной образовательной программы бакалавриата по данному направлению подготовки и является обязательной для изучения.

Согласно учебному плану дисциплина проводится в 1 семестре.

Изучение дисциплины опирается на знания, умения и навыки, приобретенные при освоении образовательной программы предыдущего уровня.

Язык преподавания – русский.

## **3. Виды учебной работы и тематическое содержание дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы или 144 академических часа.

### **3.1. Виды учебной работы**

Виды учебной работы	Объем в академических часах
<b>Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану</b>	144
В том числе:	
<b>Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем). Всего</b>	20
В том числе:	
Лекции (Л)	10
Практические занятия (Пр)	10
Лабораторные занятия (Лаб)	–
Вид промежуточной аттестации	Зачет, экзамен
<b>Самостоятельная работа обучающихся (СР), всего</b>	124
В том числе:	
Самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовка к занятиям - 85 часов	
Подготовка к промежуточной аттестации - 39 часов	

### 3.2. Краткое содержание дисциплины по разделам и видам учебной работы

№ п/п	Раздел дисциплины (тематический модуль)	Трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)					Оценочное средство
		Всего	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа обучающихся	
Семестр № 1							
1	Определители и матрицы	43	4	3	0	36	Контрольная работа, экзамен
2	Системы линейных уравнений	48	4	4	0	40	Контрольная работа, зачет, экзамен
3	Линейные пространства и операторы	28	1	1	0	26	Экзамен
4	Квадратичные формы	25	1	2	0	22	Зачет, экзамен
Вид промежуточной аттестации в семестре – зачет, экзамен							
<b>Итого:</b>		<b>144</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>124</b>	

### 3.3. Содержание аудиторных занятий

#### Содержание лекционных занятий

№ раздела	№ лекции	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ
Семестр № 1				
1	1	Матрицы и действия над ними	2	
1	2	Определители 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей	2	
2	3,4	Системы линейных уравнений. Методы решения систем (метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса). Решение систем линейных уравнений с помощью MS Excel и в системах компьютерной математики.	4	
3	5	Линейная зависимость и независимость векторов. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов	1	
4	5	Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.	1	
<b>Итого:</b>			<b>10</b>	

### Содержание практических (или семинарских) занятий

№ раздела	№ занятия	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ (*)
<b>Семестр № 1</b>				
1	1	Матрицы и действия над ними	2	
1	2	Определители 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей.	1	
2	2-4	Системы линейных уравнений. Методы решения систем (метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса)	4	
3	4	Линейная зависимость и независимость векторов. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.	1	
4	5	Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.	2	
<b>Итого:</b>			<b>10</b>	

### 3.4. Организация самостоятельной работы обучающегося

№ раздела	Задания для самостоятельной работы	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ (*)
<b>Семестр № 1</b>			
1	<p>Изучить теоретический материал по разделу «Определители и матрицы» (основная литература [1], [2])</p> <p><i>Изучаемые вопросы:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Определение матрицы. Сложение и вычитание матриц. Произведение матриц, произведение скаляра на матрицу. Свойства арифметических операций над матрицами.</li> <li>– Транспонирование матриц, транспонирование произведения матриц.</li> <li>– Единичная матрица. Особенности и неособенные матрицы. Обратная матрица. Условие существования обратной матрицы. Матрица, обратная произведению матриц, к транспонированной матрице.</li> <li>– Ранг матрицы. Элементарные преобразования, которые сохраняют ранги систем строк и столбцов матрицы. Теорема о ранге матрицы.</li> <li>– Способы нахождения обратной матрицы.</li> <li>– Решение матричных уравнений.</li> </ul>	10	
1	<p>Решить задачи из сборника [4] из списка основной литературы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Действия с матрицами: № 788, 793, 796, 801, 815, 827.</li> <li>– Определители 2-го и 3-го порядков: № 1, 6, 9, 13, 16, 45, 52, 100, 104, 109, 112, 116.</li> <li>– Ранг матрицы; № 608, 610, 63, 619, 621.</li> </ul>	12	

	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Обратная матрица: № 836, 839, 840, 843, 857.</li> <li>– Матричные уравнения: № 861, 862, 863, 866.</li> </ul>		
1	Выполнить контрольную работу № 1. Определители и действия с матрицами	4	
1	Подготовка к промежуточной аттестации. Подготовить ответы на базовые вопросы раздела 1 (см. п. 5.2)	9	
2	Изучить теоретический материал по разделу «Системы линейных уравнений» (основная литература [1], [2]) <i>Изучаемые вопросы:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Основные понятия. Решение СЛАУ. Эквивалентные (равносильные) системы уравнений. Определенные и неопределенные, совместные и несовместные СЛАУ.</li> <li>– Представление СЛАУ в матричной форме. Матричный способ решения СЛАУ.</li> <li>– Правило Крамера для решения СЛАУ.</li> <li>– Метод Гаусса для решения СЛАУ.</li> <li>– Базисные и свободные неизвестные (переменные). Общее и частное решения СЛАУ.</li> <li>– Исследование СЛАУ на совместность. Теорема Кронекера – Капелли.</li> </ul>	12	
2	Решить задачи из сборника [4] (из списка основной литературы): Правило Крамера: № 554, 555, 556, 557, 563. Метод Гаусса: № 567, 568, 569, 573, 574. Задачи, сводящиеся к решению СЛАУ: № 582, 85, 586, 588, 589. Исследование на совместность, общее и частное решения: № 689, 690, 692, 693, 694, 698, 699, 706, 707, 709, 711. Системы с параметрами: № 712, 713, 717, 719, 720, 721.	10	
2	Выполнить контрольную работу № 2. Системы линейных уравнений	4	
2	Предложить способ решения систем линейных уравнений с помощью приложения MS Excel	3	
2	Подготовка к промежуточной аттестации. Подготовить ответы на базовые вопросы раздела 2 (см. п. 5.2)	9	
3	Изучить теоретический материал по разделу «Линейные пространства и операторы» (основная литература [1], [2]) <i>Изучаемые вопросы:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Линейное (векторное) пространство. Векторы, действия над векторами.</li> <li>– Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Линейная комбинация векторов. Базис. Размерность линейного пространства.</li> <li>– Собственные вектора и собственные значения линейного оператора. Нахождение собственных векторов и собственных значений. Характеристический многочлен.</li> </ul>	10	
3	Решить задачи из сборника [4] (из списка основной литературы): Линейная зависимость и независимость векторов: № 639, 642, 643, 665, 666, 679, 680. Собственные значения и собственные вектора матрицы: № 1465, 1466, 1467, 1468, 1469, 1470.	6	
3	Подготовка к промежуточной аттестации.	9	

	Подготовить ответы на базовые вопросы раздела 3 (см. п. 5.2)		
4	Изучить теоретический материал по разделу «Квадратичные формы» (основная литература [1], [2]) <i>Изучаемые вопросы:</i> – Квадратичная форма, ее матрица, матричная запись квадратичной формы. – Изменение матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании. – Канонический вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа, ортогональным преобразованием. – Закон инерции квадратичных форм. Положительно определенная квадратичная форма, условия положительной определенности. Критерий Сильвестра.	8	
4	Решить задачи из сборника [4] (из списка основной литературы): № 1175, 1178, 1183, 1185, 1243, 1244, 1248, 1249, 1251.	6	
4	Подготовка к промежуточной аттестации. Подготовить ответы на базовые вопросы раздела 4 (см. п. 5.2)	6	
2,4	Промежуточная аттестация. Сдача зачета	2	
1-4	Промежуточная аттестация. Сдача экзамена	4	
	<b>Итого</b>	<b>124</b>	

#### 4. Образовательные технологии по дисциплине

При изучении дисциплины «Линейная алгебра» используются следующие образовательные технологии:

- аудиторные занятия (лекционные и практические занятия);
- внеаудиторные занятия (самостоятельная работа, индивидуальные консультации).

Учебно-методические материалы публикуются в свободном доступе на сайте дисциплины: [https://math-it.petsu.ru/users/semenova/Linear\\_Algebra\\_ZO/](https://math-it.petsu.ru/users/semenova/Linear_Algebra_ZO/)

#### 5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

5.1. Текущий контроль осуществляется преподавателем дисциплины при проверке выполнения контрольных работ.

К оценочным средствам для текущего контроля относятся: контрольная работа.

##### Оценочное средство. Контрольная работа

##### Контрольная работа № 1. Определители и действия с матрицами

*Задание 1.*

Даны матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Найти произведения матриц  $M = A \cdot B$  и  $N = B \cdot A$ .
2. Найти матрицу  $D = A^2 - 3B$ .
3. Вычислить определитель матрицы  $A$ :



- а) способом разложения определителя по элементам какого-либо столбца или какой-либо строки;  
 б) по правилу треугольника.
4. Найти ранг матрицы  $C$ .
5. Найти матрицу, обратную матрице  $B$ .

*Задание 2.*

Найти матрицу  $X$  из матричного уравнения  $AX + B^2 = 2C$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Критерий оценивания контрольных работ.* Контрольная работа «зачтена», если правильно выполнены все предложенные задания.

## **Контрольная работа № 2. Системы линейных уравнений**

*Задание 1.*

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x + 4y - 7z = 1, \\ 9x - 3y + z = 2, \\ 5x - 3y + 3z = 3. \end{cases}$$

- а) матричным методом; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса

*Задание 2.*

Решить системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

*Критерий оценивания контрольных работ.* Контрольная работа «зачтена», если правильно выполнены все предложенные задания.

5.2. Промежуточная аттестация проводится в виде зачета и экзамена.

Зачет проводится в письменной форме (продолжительность выполнения зачетного задания – 2 академических часа). Зачетное задание включает задания по второму и четвертому разделам дисциплины и позволяет оценить умение решать системы линейных уравнений, находить собственные значения и собственные вектора матрицы, выполнять преобразование квадратичной формы.

### **Примерный вариант зачетного задания**

1. Для заданной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

выполните следующие задания:

- 1) как, не решая систему выяснить существование решения и его единственность;
- 2) найдите решение системы методом Гаусса;
- 3) найдите обратную матрицу системы.

2. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Приведите квадратичную форму  $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  к каноническому виду.

*Критерий оценивания зачетного задания*

Обучающийся получает зачет, если он правильно решил не менее 50% предложенных заданий.

К экзамену допускается обучающийся, если он выполнил все текущие контрольные работы и зачетное задание на оценку «зачтено». Экзамен проводится в письменной форме с последующей защитой ответов в форме устного собеседования. Экзаменационный билет содержит вопросы и задания по всем разделам дисциплины.

## Список базовых вопросов и заданий по разделам

### Раздел 1. Определители и матрицы

#### 1.1. Определители 2-го и 3-го порядков

1. Сформулируйте определение определителя 2-го порядка.
2. Перечислите свойства определителя 2-го порядка.
3. Вычислите определители

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

4. Решите уравнение  $\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ .

5. Докажите, что уравнение  $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$  имеет вещественные корни при любых вещественных  $a, b, c$ .

6. Сформулируйте определение определителя 3-го порядка.
7. Перечислите свойства определителя 3-го порядка.
8. Не раскрывая определителя, докажите, что он равен нулю:

$$1) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определители:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

#### 1.2. Определители 2-го и 3-го порядков

1. Дайте определение матрицы. Что понимается под размером (или размерностью, порядком) матрицы? Как нумеруются элементы матрицы?

2. В какой строке и каком столбце расположен элемент матрицы, обозначенный  $a_{35}$  ?
3. Виды матриц (нулевая, квадратная, единичная, диагональная треугольная, симметричная).
4. Как определяются линейные операции над матрицами?
5. Перечислите свойства линейных операций над матрицами.
6. Как определить линейную комбинацию столбцов (строк)?
7. Как определяется произведение матриц? Приведите примеры.
8. Каким условиям должны удовлетворять матрицы  $A$  и  $B$ , чтобы
  - 1) существовало произведение  $AB$ ;
  - 2) существовало произведение  $BA$ ;
  - 3) существовали оба произведения  $AB$  и  $BA$ ?
9. На какую матрицу нужно умножить матрицу  $A$ , чтобы в результате получить:
  - 1) первый столбец матрицы  $A$ ?
  - 2) первую строку матрица  $A$ ?
10. Перечислите свойства произведения матриц.
11. Как определяется многочлен от матрицы?
12. Сформулируйте определение обратной матрицы. Всегда ли существует обратная матрица?
13. Запишите формулу вычисления обратной матрицы для квадратной матрицы порядка 2.
14. Как построить обратную матрицу для квадратной матрицы порядка 3?
15. Существует ли обратная матрица для матрицы-строки  $(1\ 2\ 3)$ ?
16. Сформулируйте свойства обратной матрицы.
17. Что такое транспонирование матрицы? Сформулируйте свойства операции транспонирования.

## Раздел 2. Системы линейных уравнений

1. Какую систему уравнений называют линейной?
2. Какую систему линейных уравнений называют однородной, неоднородной?
3. Запись системы линейных уравнений (СЛУ) в матричном виде.
4. Что называется расширенной матрицей СЛУ?
5. Что называется решением системы? Какие системы называются совместными, какие несовместными?
6. Всегда ли совместна однородная система?
7. Всегда ли совместна неоднородная система?
8. При каком условии существует ненулевое решение однородной СЛУ?
9. Какие преобразования системы называются элементарными?
10. При каком значении параметра  $\lambda$  система 
$$\begin{cases} 2x - \lambda \cdot y = 6, \\ x + 2y = 5, \end{cases}$$
 не имеет решений?
11. При каком условии система линейных неоднородных уравнений имеет единственное решение?
12. Какой вывод о существовании решения системы можно сделать, зная ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы?
13. Какую систему линейных уравнений можно решить методом Крамера? В чем он заключается? Приведите пример.
14. В чем состоит метод Гаусса? Приведите пример.
15. В каком случае систему линейных уравнений можно решить помощью обратной матрицы системы? Как при этом строится решение? Приведите пример.
16. Рассмотреть все возможные случаи, встречающиеся при решении систем линейных уравнений с двумя переменными  $x, y$

$$\begin{cases} ax + by = f, \\ cx + dy = g. \end{cases}$$

### Раздел 3. Линейные пространства и операторы

#### 3.1 Линейная зависимость и независимость системы векторов

1. Что называют арифметическим  $n$ -мерным вектором?
2. Что называется суммой двух векторов, произведением вектора на число?
3. Какие векторы считаются равными?
4. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 2, -3)$  и  $\vec{b} = (1, 1, 1)$ . Чему равен вектор  $\vec{c}$ , если  $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 0$ ?
5. Что называется  $n$ -мерным вещественным векторным пространством?
6. Дайте определение линейной зависимости (независимости) системы векторов.
7. Перечислите свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов.
8. Какой критерий линейной независимости системы векторов

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)?$$

9. Исследуйте на линейную зависимость систему векторов
 
$$\vec{a} = (2, -3, 1), \quad \vec{b} = (3, -1, 5), \quad \vec{c} = (1, -4, 3).$$
10. Перечислите элементарные преобразования системы векторов, которые не меняют свойств ее линейной зависимости и независимости.
11. Какой вид системы векторов называют ступенчатым? Приведите пример.
12. При каком значении параметра  $\lambda$  система векторов

$$\vec{a} = (-2, 3, 1), \quad \vec{b} = (\lambda, 1, 2), \quad \vec{c} = (-2, \lambda, -1)?$$

не будет являться линейно независимой?

13. Исследуйте на линейную независимость векторы  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  и  $\vec{b} = (3, 6, 9)$ .

#### 3.2. Собственные вектора и собственные значения матрицы

1. Дайте определение собственных векторов и собственных значений матрицы. Для матрицы какой размерности они могут быть определены?
2. Что называется характеристическим многочленом и характеристическим уравнением матрицы?

3. Постройте характеристический многочлен матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

4. Перечислите свойства собственных векторов и собственных значений матрицы.
5. Свойство линейной независимости собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям матрицы (докажите свойство для случая, когда матрица имеет размерность, равную 2).
6. Можно ли зная все собственные значения матрицы (с учетом их кратности) найти ее определитель?
7. Если матрица размерности 4 имеет следующие собственные значения 2, -3, -4 и 4, то чему будет равен определитель матрицы?

8. Найдите собственные значения и собственные вектора матрицы  $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ .

9. Как определить количество линейно независимых векторов, соответствующих собственному значению?

10. Какие собственные значения имеет матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?
11. Можно ли утверждать, что собственный вектор матрицы, соответствующий собственному значению, определяется однозначно?
12. Сколько различных собственных векторов соответствует каждому собственному значению матрицы?
13. Матрица  $A$  порядка  $n$  имеет собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Найдите собственные значения матриц  $A^2, A^3, \dots, A^n$ .
14. Вектор  $X$  является собственным вектором матриц  $A$  и  $B$ . Для матрицы  $A$  он соответствует собственному значению  $\lambda$ , а для матрицы  $B$  – собственному значению  $\mu$ . Будет ли вектор  $X$  собственным для произведения матриц  $A \cdot B$  (для суммы матриц  $A + B$ , для разности матриц  $A - B$ , для ненулевой линейной комбинации  $\alpha A + \beta B$ )? Если да, то какому собственному значению он будет соответствовать?

#### Раздел 4. Квадратичные формы

1. Дайте определение квадратичной формы.
2. Запись квадратичной формы в матричном виде.
3. Что называется рангом квадратичной формы? Какая квадратичная форма называется вырожденной?
4. Какой вид квадратичной формы называется каноническим?
5. В чем заключается метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду? Приведите пример.
6. Как записать канонический вид квадратичной формы, зная собственные значения соответствующей ей матрицы?

7. Какая квадратичная форма соответствует матрице  $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 6 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ?

8. Запишите матрицу квадратичной формы  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$
9. Приведите квадратичную форму  $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$  к каноническому виду. Найдите линейное преобразование, приводящее ее к этому виду.

#### *Критерий оценивания ответа на экзамене*

Оценка **«отлично»** выставляется обучающемуся, если он дает исчерпывающие, четко формулируемые ответы на теоретические вопросы и правильно решает задачи, включенные в экзаменационный билет.

Оценка **«хорошо»** выставляется обучающемуся, если на большинство предложенных вопросов он дает правильные ответы. При этом решение задач может быть выполнено с незначительными вычислительными ошибками.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он в основном правильно решает предложенные в билете задачи, но затрудняется в формулировании ответов на теоретические вопросы или оперирует неточными формулировками, допускает ошибки по существу вопросов.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он не освоил обязательного минимума знаний предмета, не способен ответить на вопросы даже при собеседовании с преподавателем при обсуждении письменного ответа.

Подробно средства оценивания для проведения промежуточной аттестации обучающихся приведены в Фонде оценочных средств по данной дисциплине.

## 6. Методические рекомендации обучающимся по дисциплине, в том числе для самостоятельной работы

Обучающимся рекомендуется придерживаться установленного преподавателям плана-графика изучения теоретического материала и выполнения практических заданий:

Раздел 1	Определители и матрицы	октябрь
Раздел 2	Системы линейных уравнений	ноябрь
Раздел 3	Линейные пространства и операторы	декабрь
Раздел 4	Квадратичные формы	декабрь-январь

Задания для самостоятельной работы указаны в пункте 3.4 данной программы. Для изучения теоретического материала рекомендуется использовать учебную литературу [1] и [2] из списка основной литературы. Методы решения и примеры типовых задач линейной алгебры рассмотрены в [3] из списка основной литературы.

В первую очередь необходимо разобраться с основными понятиями линейной алгебры и их применением к решению стандартных задач. Обратить внимание на возможность использования многочисленных свойств определителей для их вычисления. Стараться замечать структурные закономерности в матрицах и системах линейных уравнений. Доказательства теорем разбирать сначала на простых примерах, а уже потом переходить к разбору доказательств в общем случае. При этом пытаться самостоятельно доказать соответствующий результат.

По разделам дисциплины 1 и 2 обучающийся должен выполнить контрольные работы, которые необходимо представить преподавателю, ведущему дисциплину, в установленные сроки:

Контрольная работа № 1. Определители и действия с матрицами	31 октября
Контрольная работа № 2. Системы линейных уравнений	30 ноября

В контрольной работе должны быть отражено полное решение предложенных задач со всеми промежуточными выкладками и пояснениями (для выявления правильности понимания обучающимся материала). Если обучающийся дает только ответ без решений, то задача считается не выполненной. Контрольная работа должна быть оформлена аккуратно с ясным изложением решения.

Учебно-методические материалы и результаты проверки контрольных заданий публикуются в свободном доступе на сайте дисциплины:

[https://math-it.petsu.ru/users/semnova/Linear\\_Algebra\\_ZO/](https://math-it.petsu.ru/users/semnova/Linear_Algebra_ZO/)

## 7. Методические рекомендации преподавателям по дисциплине

Планирование аудиторных лекционных и практических занятий в период установочной и экзаменационной сессий осуществляется с учётом установленного количества часов.

*Лекции* составляют основу теоретического обучения, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления. Ведущим методом лекционного занятия выступает устное изложение учебного материала.

*Практические занятия* направлены на формирование у обучающихся умений решать типовые задачи. *Необходимо добиваться освоения основных понятий линейной алгебры и умения решать ее типовые задачи всеми студентами.*

Преподаватель оценивает знания и умения обучающихся путем проведения контрольных работ в межсессионный период и проверки домашних заданий в период сессии.

Преподавателю необходимо составить и довести до сведения обучающихся (напри-

мер, в период установочной сессии) план-график изучения теоретического материала дисциплины и выполнения практических заданий в рамках самостоятельной работы, а также установить сроки выполнения контрольных работ для текущего контроля.

Рекомендуемый график сдачи контрольных работ в межсессионный период приведен в п. 6 данной программы.

Выбор формы проведения экзамена (в виде устного или письменного опроса, тестирования или решения задач) осуществляется по усмотрению преподавателя, учитывая итоги текущей успеваемости обучающихся.

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Дисциплина полностью обеспечена учебной литературой, представленной в печатном или электронном виде. Для осуществления образовательной деятельности по дисциплине рекомендуется следующая основная и дополнительная литература.

### 8.1. Основная литература:

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П. С. Александров. – Изд. 2-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 512 с.
2. Ильин В.А. Линейная алгебра : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. – Изд. 6-е, стер. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 280 с. (допустим любой год издания). URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>
3. Линейная алгебра: метод. указания / [сост. : Е. А. Ключкина] ; Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования Петрозавод. гос. ун-т. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2010. – 25 с.
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.

### 8.2. Дополнительная литература:

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру: учебник / А. И. Кострикин. – Изд. 2-е, испр. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Ч. 2 : Линейная алгебра. – 368 с. (или др. изд.)  
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>
2. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
3. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.

### 8.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Сайт «EqWorld. МИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»  
<http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>

Книги по алгебре <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

1. Литература по линейной алгебре <http://pay.diary.ru/~eek/p47467303.htm#>
2. <http://mathelp.spb.ru/la.htm> (лекции по линейной алгебре).
3. Лекции по Линейной алгебре на YouTube  
[https://www.youtube.com/results?search\\_query=%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F+%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0](https://www.youtube.com/results?search_query=%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F+%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)
4. Решебники по высшей математике <http://www.diary.ru/~eek/p47594145.htm>

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Материально-техническая база ПетрГУ обеспечивает проведение всех видов дисциплинарной подготовки обучающихся, предусмотренных учебным планом и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Минимально-необходимый перечень для информационно-технического и материально-технического обеспечения дисциплины:

- аудитория для проведения лекционных и практических занятий, оснащенная рабочими местами для обучающихся и преподавателя, доской, мультимедийным оборудованием;
- библиотека с читальным залом и залом для самостоятельной работы обучающегося, оснащенная компьютером с выходом в Интернет, книжный фонд которой составляет специализированная научная, учебная и методическая литература, журналы (в печатном или электронном виде).

Дата: 5 мая 2021 г.