№ 681. Найти какую-нибудь базу системы векторов и все векторы системы, не входщие в данную базу, выразить через векторы базы.

Система векторов:

$$a_1 := (1\ \ 2\ \ 3\ \ -4) \qquad a_2 := (2\ \ 3\ \ -4\ \ 1) \qquad a_3 := (2\ \ -5\ \ 8\ \ -3)$$

$$a_4 := (5\ \ 26\ \ -9\ \ -12) \qquad a_5 := (3\ \ -4\ \ 1\ \ 2)$$

Составим матрицу системы векторов: $A := \mathrm{stack}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ 5 & 26 & -9 & -12 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Вывод: система содержит 3 линейно независимых вектора

$$a_1 := a_1 \quad a_2 := a_2 \quad a_3 := a_3 \quad a_4 := a_4 \quad a_5 := a_5 \qquad \mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$V := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \qquad As := A$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду As с построением соответствующей системы векторов V

P - матрица
преобразования

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad As := P \cdot As \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & -9 & 2 & 5 \\ 0 & 16 & -24 & 8 \\ 0 & -10 & -8 & 14 \end{pmatrix} \qquad V := P \cdot V \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - 2 \cdot a_1 \\ a_3 - 2 \cdot a_1 \\ a_4 - 5 \cdot a_1 \\ a_5 - 3 \cdot a_1 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad As := P \cdot As \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \\ 0 & 0 & -92 & 76 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \end{pmatrix} \qquad V := P \cdot V \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - 2 \cdot a_1 \\ 16 \cdot a_1 - 9 \cdot a_2 + a_3 \\ 6 \cdot a_2 - 20 \cdot a_1 + a_4 + a_5 \\ 17 \cdot a_1 - 10 \cdot a_2 + a_5 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad As := P \cdot As \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V := P \cdot V \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - 2 \cdot a_1 \\ 16 \cdot a_1 - 9 \cdot a_2 + a_3 \\ a_3 - 3 \cdot a_2 - 4 \cdot a_1 + a_4 + a_5 \\ a_1 - a_2 - a_3 + a_5 \end{pmatrix}$$

Вывод: базой системы можно выбрать вектора a_1, a_2, a_3

Выразим вектора, не входящие в базу через векторы базы:

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} V_4 = 0 \\ V_5 = 0 \end{pmatrix} \text{solve}, a_4, a_5 \;\rightarrow \begin{pmatrix} 5 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - 2 \cdot a_3 & a_2 - a_1 + a_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$a_4 \rightarrow 5 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - 2 \cdot a_3$$

$$a_5 \rightarrow a_2 - a_1 + a_3$$