№ 1255

Привести квадратичную форму методом ортогональных преобразований

$ORIGIN := 1$

$Q(x) := 2x_1 \cdot x_2 - 6 \cdot x_1 \cdot x_3 - 6 \cdot x_2 \cdot x_4 + 2 \cdot x_3 \cdot x_4$

$N := 4 \qquad i := 1..N \qquad j := 1..N \qquad AA_{i,j} := 0$

1. Формирование матрицы квадратичной формы

```
A[i,j] := | for k ∈ 1..N
          |   | λ[k] ← 0
          |   | μ[k] ← 0
          |   | ν[k] ← 0
          | if i = j
          |   | λ[i] ← 1
          |   | Q(λ)
          | if i ≠ j
          |   | λ[i] ← 1
          |   | λ[j] ← 1
          |   | μ[i] ← 1
          |   | ν[j] ← 1
          |   | 1/2·(Q(λ) − Q(μ) − Q(ν))
```

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Определение собственных значений и собственных векторов

$$\text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad B := \text{eigenvecs}(A) \qquad B \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Построение матрицы преобразования (нормировка собственных векторов)

$$B^{\langle i \rangle} := \frac{B^{\langle i \rangle}}{\left|B^{\langle i \rangle}\right|} \qquad B \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Линейное преобразование переменных, с помощью которого квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$Y_i := y_i \qquad X_i := x_i$$

$$LP := X = B \cdot Y \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2} + \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2} \\ \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2} \\ \frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2} - \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2} \\ \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2} \end{pmatrix}$$

5. Матрица квадратичной формы после преобразования

$$C := B^T \cdot A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Канонический вид квадратичной формы

$$H(y) := Y^T \cdot C \cdot Y \rightarrow 2 \cdot (y_3)^2 - 2 \cdot (y_2)^2 - 4 \cdot (y_1)^2 + 4 \cdot (y_4)^2$$

Вывод: С помощью линейного преобразования

$$LP \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2} + \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2} \\ \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2} \\ \frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2} - \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2} \\ \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2} \end{pmatrix}$$

квадратичная форма:

$$Q(x) \rightarrow 2\cdot x_1\cdot x_2 - 6\cdot x_1\cdot x_3 - 6\cdot x_2\cdot x_4 + 2\cdot x_3\cdot x_4$$

приводится к каноническому виду:

$$H(y) \rightarrow 2\cdot\left(y_3\right)^2 - 2\cdot\left(y_2\right)^2 - 4\cdot\left(y_1\right)^2 + 4\cdot\left(y_4\right)^2$$