[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010. URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре**. http://bookre.org/reader?file=635343

11.12.2025

Занятие № 14

Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

№ 1175

№ 1175

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(x_1^2 + 2\cdot x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2\right) - (2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + \underbrace{2x_3^2 - 2x_2x_3}_{} =$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2\left(x_3^2 - 2\frac{x_2}{2}x_3 + \frac{x_2^2}{4}\right) - \frac{x_2^2}{2} - 3x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2\left(x_3 - \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}x_2^2 = \underline{y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{7}{2}y_3^2} = \tilde{Q}(y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ y_3 = x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_3 - y_2 - \frac{1}{2}y_3 = y_1 - y_2 - \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x = B\cdot y \qquad \underline{\underline{\tilde{A} = B^T A B}}$$

$$B^T A B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

№ 1178

№ 1178

$$Q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = y_1^2 - y_2^2 + (y_1+y_2)y_3 + (y_1+y_2)y_4 +$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases} \qquad x = B_1 y \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (y_1-y_2)y_3 + (y_1-y_2)y_4 + y_3y_4 =$$

$$= \underline{y_1^2} - y_2^2 + \underline{2y_1y_3} + \underline{2y_1y_4} + y_3y_4$$

$$= -y_2^2 + \left(y_1^2 + 2y_1(y_3+y_4) + (y_3+y_4)^2\right) - (y_3+y_4)^2 + y_3y_4 =$$

$$= -y_2^2 + (y_1+y_3+y_4)^2 - y_3^2 - y_3y_4 - y_4^2 =$$

$$= -y_2^2 + (y_1+y_3+y_4)^2 - \left(y_3 + \frac{y_4}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}y_4^2 = -z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - \frac{3}{4}z_4^2 =$$

$$= \tilde{Q}(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

$$\begin{cases} z_1 = y_2 \\ z_2 = y_1 + y_3 + y_4 \\ z_3 = y_3 + \frac{y_4}{2} \\ z_4 = y_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = z_2 - z_3 + \frac{1}{2}z_4 - z_4 \\ y_2 = z_1 \\ y_3 = z_3 - \frac{1}{2}z_4 \\ y_4 = z_4 \end{cases} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = B_2 \cdot z$$

$$B = B_1 B_2$$

$$\underline{\underline{x = Bz}}$$

№ 1243

Домашнее задание

№№ **1176, 1184, 1243** (завершить)

Подготовка к контрольной работе 18.12.25. Задания:

- собственные значения и собственные векторы матрицы,
- приведение квадратичной формы к каноническому виду,
- построение обратной матрицы,
- скалярное произведение векторов.