



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: [http://elibrary.sgu.ru/uch\\_lit/560.pdf](http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf)

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

---

**04.12.2025**

## **Занятие № 13**

### **Собственные значения и собственные векторы матрицы**

1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$

б)  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

**Ответы:**

а)  $\lambda_1 = 1, X_1 = (1; 1)^T;$

б)  $\lambda_1 = 3, X_1 = (1; 1)^T;$

$\lambda_2 = 3, X_2 = (1; -1)^T;$

$\lambda_2 = 5, X_2 = (1; -1)^T.$

2. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а)  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

б)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

в)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

**Ответы:**

а)  $\lambda_2 = 2, S_1 = c(1; 1; 0)^T, \forall c \neq 0;$

$\lambda_2 = 3, S_2 = c_1(2; 1; 0)^T + c_2(0; 0; 1)^T, \forall c_1, c_2: c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$

3. При каких значениях параметра  $a$  матрица  $A$  имеет собственный вектор  $v$ :

а)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

**Ответы:** а)  $a = 3$ ; б)  $a = 4$ .

4. Проверьте, что вектор  $X$  является собственным вектором матрицы  $A$  и найдите соответствующее ему собственное значение:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Ответы:** а)  $\lambda = 2$ ; б)  $\lambda = -4$ .

5. Найдите множество собственных векторов матрицы  $A$ , соответствующих заданному собственному значению, решив однородную систему линейных уравнений:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 90 \\ 4 & 46 & 21 & 400 \\ 5 & 55 & 28 & 490 \\ 7 & 77 & 37 & 712 \end{pmatrix}, \quad \lambda=2;$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 5 & 50 \\ 3 & -27 & 16 & 167 \\ 2 & -20 & 14 & 117 \\ 4 & -40 & 21 & 220 \end{pmatrix}, \quad \lambda=3;$$



### Домашнее задание

[П]: №№ 1(б), 2(б), 3(б), 4(б), 5(б).

**Дополнительное задание.** Для квадратной матрицы порядка  $n$ , все элементы которой равны 1, найдите все собственные значения.

Рассмотреть примеры, приведенные в [материалах лекции 9](#)