[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.
URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре**. http://bookre.org/reader?file=635343

19.09.2025

Занятие № 3

Действия с матрицами

1. **Суммой матриц** $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ одинаковой размерности называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$, элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Обозначение: $C=A+B$.

2. **Произведением матрицы** $A=\left(a_{ij}\right)$ **на число** λ называется матрица С, элементы которой определяются равенством $c_{ij}=\lambda a_{ij}$. Обозначение: $C=\lambda A$.

3. **Произведением матрицы** $A=\left(a_{ij}\right)$ размера $m\times k$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)$ размера $k\times n$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ размера $m\times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pj}.$$

Обозначение: $C=AB$. **Произведение определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя). При этом число строк матрицы C равно числу строк матрицы A, а число столбцов – числу столбцов матрицы B:**

$$[k\times n]\cdot[n\times m]=[k\times m].$$

4. Матрица $A^T=\left(\tilde{a}_{ij}\right)$ является **транспонированной к матрице** $A=\left(a_{ij}\right)$, если ее элементы определяются равенством $\tilde{a}_{ij}=a_{ji}$. Таким образом, строки матрицы A^T являются соответствующими столбцами матрицы A.

Свойства арифметических операций с матрицами:

1) $A+B=B+A$;	6) $A(BC)=(AB)C$;
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;	7) $A(B+C)=AB+AC$;
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;	8) $(\lambda A)B=A(\lambda B)$;
4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;	9) $(A^T)^T=A$;
5) $(A+B)^T=A^T+B^T$;	10) $(AB)^T=B^T A^T$.

Задание 1

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}.$

Ответы:

1) $AB=\begin{pmatrix}17\\ 39\end{pmatrix}$	2) $AB=\begin{pmatrix}22 & 28\\ 49 & 64\end{pmatrix};\quad BA=\begin{pmatrix}9 & 12 & 15\\ 19 & 26 & 33\\ 29 & 40 & 51\end{pmatrix}$

Задание 2

Для матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$

Найдите $(3A-2B)C^T$.

Ответ: $\begin{pmatrix}25 & -16 & 13\\ 9 & -5 & 10\\ 140 & -87 & 91\end{pmatrix}$

Задание 3

Найдите *f*(A), если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-7x-2$.

Замечание[1]. $f(A)=A^2-7A-2E$, где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A.

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Задание 4

Для любого натурального n найдите

1) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$; 2) № 802: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

Ответы:

1) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;	2) $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$.

---

[1] Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ - многочлен от переменной x. Под ***многочленом от матрицы*** понимается выражение

$$f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE,$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и квадратная матрица A.

Задание 5 (№ 815 (а))

Докажите, что если A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка, причем $AB \neq BA$, то $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Домашнее задание

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[**П**]: №№ **801, 805, 815(б), 827, 829.**

Для любого натурального n **найдите** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Самостоятельно разобрать решение следующих заданий

Задание 1.

На какую матрицу и как (справа или слева) надо умножить матрицу A порядка $n \times m$, чтобы получить матрицу, совпадающую с k-м столбцом матрицы A.

$$A \cdot S, \ \textit{где } S - \textit{столбец из } m \textit{ элементов } \ s_j = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & 4 \\ 5 & 6 & \boxed{7} & 8 \\ -1 & -2 & \boxed{-3} & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

На какую матрицу и как надо умножить матрицу A порядка $n \times m$, чтобы получить матрицу, совпадающую с k-ой строкой матрицы A.

$$S \cdot A, \ \textit{где } S - \textit{строка из n элементов } s_j = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{5 \quad 6 \quad 7 \quad 8} \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Примеры выделения из матрицы отдельных столбцов и строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Докажите, что $(AB)^T = B^T A^T$, матрицы в правой и левой части равенства существуют.

Доказательство. Пусть матрица A имеет размеры $\mathrm{n}\times\mathrm{m}$, матрица B - $\mathrm{m}\times\mathrm{k}$. Обозначим $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. Матрица C имеет размеры $\mathrm{n}\times\mathrm{k}$, а транспонированная матрица C^T – размеры $\mathrm{k}\times\mathrm{n}$. Для элементов матрицы C^T имеем:

$$c_{si}^T = c_{is} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; s = 1, 2, \ldots, k.$$

С другой стороны, матрицы B^{T} и A^{T} имеют размеры $\mathrm{k}\times\mathrm{m}$ и $\mathrm{m}\times\mathrm{n}$ соответственно, и

$$b_{sj}^T = b_{js}, \quad a_{ji}^T = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m; \;\; s = 1, 2, \ldots, k.$$

Обозначим $\mathrm{D} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$. Матрица D имеет размеры $\mathrm{k}\times\mathrm{n}$ и для ее элементов имеем:

$$d_{si} = \sum_{j=1}^{m} b_{sj}^T a_{ji}^T = \sum_{j=1}^{m} b_{js} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js} = c_{is} = c_{si}^T, \;\; s = 1, 2, \ldots, k; \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из равенства элементов матриц D и C^{T} следует $\mathrm{C}^{\mathrm{T}} = \mathrm{D}$. Таким образом, $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.