[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.
URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре**. http://bookre.org/reader?file=635343

11.09.2025

Занятие № 1

Определители 2-го порядка. Решение систем линейных уравнений с двумя неизвестными

При решении систем линейных уравнений, а также в ряде других задач используются специальные математические выражения, называемые определителями.

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется *определителем*[1] (*детерминантом*) *второго порядка* и обозначается символами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Об определителе (1) говорят, что он соответствует матрице:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Если для матрицы (2) ввести имя $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то соответствующий определитель можно будет обозначить как $|A|$ или $\det A$. Таким образом, для определителя матрицы A по определению имеем:

---

[1] Термин «Определитель» в современном его значении ввел О.Коши (1815).

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

Задания

№№ 6, 9, 14

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь коэффициенты a_{ij} при неизвестных x_1 и x_2 имеют два индекса, первый из которых указывает, какому уравнению принадлежит коэффициент, а второй, при каком неизвестном он стоит. Таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы* (4).

Умножая первое уравнение системы (4) на a_{22}, второе на $-a_{12}$ и складывая полученные уравнения, найдем:

$$+\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}\left|\begin{matrix} \times a_{22} \\ \times(-a_{12}) \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы (4) на $-a_{21}$, второе на a_{11} и складывая полученные уравнения, найдем:

$$+\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}\left|\begin{matrix} \times(-a_{21}) \\ \times a_{11} \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$ то система (4) имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{12} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{5}$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$ то возможны следующие случаи:

1) Если хотя бы одно из чисел $b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$ и $b_2 a_{12} - b_1 a_{21}$ отлично от нуля, то система (4) решений не имеет;
2) Если оба числа $b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$ и $b_2 a_{12} - b_1 a_{21}$ равны нулю, то уравнения системы пропорциональны, и система может иметь бесконечно много решений (каждое из которых получается, если одну из неизвестных взять произвольно, а вторую вычислить с помощью любого из уравнений из системы), а может и не иметь решений.

   Например, система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2; \end{cases}$ имеет бесконечно много решений и $x_2 = 1 - x_1$. А система $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 = 1, \end{cases}$ очевидно не имеет решений.

С помощью определителей формулы (5) для решения системы уравнений (4) могут быть записаны в виде:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Формулы (6) называют *формулами Крамера*[2].

---

[2] **КРАМЕР** Габриель (Cramer Gabriel) (31.07.1704, Женева,– 4.01.1752, Баньоль, близ Нима, Франция) – швейцарский математик. Установив и опубликовав в 1750 г. правило решения систем линейных уравнений с буквенными коэффициентами (правило Крамера), Крамер заложил основы теории определителей.

√ Заметим, что в числителе первой формулы (6) стоит определитель матрицы, которая получена из матрицы A заменой ее первого столбца на столбец из элементов правой части системы (1), а в числителе второй – определитель матрицы, полученной из A заменой ее второго столбца на столбец из элементов правой части системы (1).

Задания

- №№ 22, 26, 36.
- Для всех значений параметра $a \in \mathrm{R}$ решить систему уравнений:

$$\begin{cases} ax - 4y = 2, \\ x - ay = 1. \end{cases}$$

Определители 3-го порядка. Правило треугольника. Разложение определителя по элементам первой строки. Свойства определителей

Задания

[П]: № 43.

Домашнее задание

[П] №№ 13, 16, 23, 27, 45.

Для всех значений параметра $a \in \mathrm{R}$ найдите решение системы: $\begin{cases} 2x - ay = a, \\ x + 4y = 6 \end{cases}$

(Математика. Большой энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М., 2000. С. 705.)

18.09.2025

Занятие № 2

[П]: № **74**, **82** (решение системы линейных уравнений с помощью определителей 2-го порядка).

Определители 3-го порядка. Правило треугольника. Разложение определителя по элементам первой строки. Свойства определителей

[П]: №№ **100, 102, 103, 106, 107, 111, 114**.

[П]: №№ **64**,

Домашнее задание

[**П**] №№ **61, 83, 101, 104, 105, 109, 112, 116.**