



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010. URL: [http://elibrary.sgu.ru/uch\\_lit/560.pdf](http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf)

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.**  
<http://bookre.org/reader?file=635343>

---

**14.11.2024**

**Занятие № 10**

**Обратная матрица. Матричные уравнения**

№ 836

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4 - 6 = -2 \neq 0 \quad \exists! A^{-1}$$

1.

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4 \\ A_{12} &= -3 \\ A_{21} &= -2 \\ A_{22} &= 1 \end{aligned}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \left[ A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{array}{l}
 \text{2} \\
 \underbrace{\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)}_A \cdot (-3I) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{array}{l} +II \\ \cdot (-\frac{1}{2}) \end{array} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{A^{-1}}
 \end{array}$$

~841

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -II \\ -I \\ -I \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -III \\ -2I \\ -II \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -II \end{array} \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -10III \\ +7III \\ \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \cdot (-1) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 844

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +II + III + IV \\ -I \\ -I \\ -I \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -III \\ -III \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -III \\ -III \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +\frac{1}{2}IV \\ +\frac{1}{2}IV \\ \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1/4 \\ \cdot (-1/2) \\ \cdot (-1/2) \\ \cdot 1/4 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} A$$



21.11.2024

## Занятие № 11

### Обратная матрица. Матричные уравнения

№ 865

$$X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}}_B$$

$$XA = B$$

$$XAA^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

X, 3x3,

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ +\cdot I \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +\cdot III \\ -5\cdot I \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 18 & 11 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2\cdot II - 11\cdot III \end{array} \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -19 & 0 & -9 & -10 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 19\cdot I + 2\cdot II \\ 19\cdot III + 5\cdot II \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 19 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -19 & 0 & -9 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 38 & -26 & -50 & -36 \end{array} \right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{11}{19} \\ -\frac{13}{19} & -\frac{25}{19} & -\frac{18}{19} \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{19} B \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

№ 867



### Домашнее задание

[П]: №№ 864, 866.

Найти решение уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$