[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.
URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре**. http://bookre.org/reader?file=635343

2.10.2023

Занятие № 3

Действия с матрицами

1. **Суммой матриц** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Обозначение: $C=A+B$.

2. **Произведением матрицы** $A=(a_{ij})$ **на число** λ называется матрица С, элементы которой определяются равенством $c_{ij}=\lambda a_{ij}$. Обозначение: $C=\lambda A$.

3. **Произведением матрицы** $A=(a_{ij})$ размера $m\times k$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $k\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pj}.$$

Обозначение: $C=AB$. **Произведение определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя). При этом число строк матрицы C равно числу строк матрицы A, а число столбцов – числу столбцов матрицы B:**

$$[k \times n] \cdot [n \times m] = [k \times m].$$

4. Матрица $A^T = (\tilde{a}_{ij})$ является **транспонированной к матрице** $A = (a_{ij})$, если ее элементы определяются равенством $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$. Таким образом, строки матрицы A^T являются соответствующими столбцами матрицы A.

Свойства арифметических операций с матрицами:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
5) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
6) $A(BC) = (AB)C$;
7) $A(B + C) = AB + AC$;
8) $(\lambda A)B = A(\lambda B)$;
9) $(A^T)^T = A$;
10) $(AB)^T = B^T A^T$.

Задание 1

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответы:

1) $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$	2) $AB = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$

Задание 2

Для матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$

Найдите $(3A-2B)C^T$.

Ответ: $\begin{pmatrix}25 & -16 & 13\\ 9 & -5 & 10\\ 140 & -87 & 91\end{pmatrix}$

Задание 3

Найдите $f(A)$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $\quad f(x)=x^2-7x-2.$

Замечание[1]. $f(A)=A^2-7A-2E$, где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A.

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Задание 4

Для любого натурального n найдите

1) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$; 2) № 802: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

Ответы:

1) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;	2) $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$.

---

[1] Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ - многочлен от переменной x. Под ***многочленом от матрицы*** понимается выражение

$$f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE,$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и квадратная матрица A.

Задание 7.

На какую матрицу и как (справа или слева) надо умножить матрицу A порядка $n \times m$, чтобы получить матрицу, совпадающую с k-м столбцом матрицы A.

$$A \cdot S,\ \text{где } S - \text{столбец из } m \text{ элементов } s_j = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

На какую матрицу и как надо умножить матрицу A порядка $n \times m$, чтобы получить матрицу, совпадающую с k-ой строкой матрицы A.

$$S \cdot A,\ \text{где } S - \text{строка из } n \text{ элементов } s_j = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Примеры выделения из матрицы отдельных столбцов и строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание

Для матриц А и В найдите произведения АВ и ВА:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[**П**]: №№ **801, 805, 815(а,б), 827, 829.**

Для любого натурального n **найдите** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Самостоятельно разобрать решение задания

Задание

Докажите, что $(AB)^T = B^T A^T$, матрицы в правой и левой части равенства существуют.

Доказательство. Пусть матрица A имеет размеры $n \times m$, матрица B - $m \times k$. Обозначим $C = AB$. Матрица C имеет размеры $n \times k$, а транспонированная матрица C^T – размеры $k \times n$. Для элементов матрицы C^T имеем:

$$c_{si}^T = c_{is} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ s = 1, 2, \ldots, k.$$

С другой стороны, матрицы B^T и A^T имеют размеры $k \times m$ и $m \times n$ соответственно, и

$$b_{sj}^T = b_{js}, \quad a_{ji}^T = a_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., n; \; j = 1, 2, ..., m; \quad s = 1, 2, ..., k.$$

Обозначим $D = B^T A^T$. Матрица D имеет размеры $k \times n$ и для ее элементов имеем:

$$d_{si} = \sum_{j=1}^{m} b_{sj}^T a_{ji}^T = \sum_{j=1}^{m} b_{js} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js} = c_{is} = c_{si}^T, \quad s = 1, 2, ..., k; \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Из равенства элементов матриц D и C^T следует $C^T = D$. Таким образом, $(AB)^T = B^T A^T$.