



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: [http://elibrary.sgu.ru/uch\\_lit/560.pdf](http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf)

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

---

**11.09.2023**

## Занятие № 1

### Определители 2-го порядка. Решение систем линейных уравнений с двумя неизвестными

При решении систем линейных уравнений, а также в ряде других задач используются специальные математические выражения, называемые определителями.

Выражение  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  называется *определителем<sup>1</sup>* (детерминантом) второго порядка и обозначается символами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Об определителе (1) говорят, что он соответствует матрице:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Если для матрицы (2) ввести имя  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , то соответствующий

определитель можно будет обозначить как  $|A|$  или  $\det A$ . Таким образом, для определителя матрицы  $A$  по определению имеем:

---

<sup>1</sup> Термин «Определитель» в современном его значении ввел О.Коши (1815).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (3)$$

## Задания

№№ 6, 9, 14

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь коэффициенты  $a_{ij}$  при неизвестных  $x_1$  и  $x_2$  имеют два индекса, первый из которых указывает, какому уравнению принадлежит коэффициент, а второй, при каком неизвестном он стоит. Таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы* (4).

Умножая первое уравнение системы (4) на  $a_{22}$ , второе на  $-a_{12}$  и складывая полученные уравнения, найдем:

$$+ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \begin{array}{l} \times a_{22} \\ \times (-a_{12}) \end{array} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы (4) на  $-a_{21}$ , второе на  $a_{11}$  и складывая полученные уравнения, найдем:

$$+ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \begin{array}{l} \times (-a_{21}) \\ \times a_{11} \end{array} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Если  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ , то система (4) имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{12} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (5)$$

Если  $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$ , то возможны следующие случаи:

- 1) Если хотя бы одно из чисел  $b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$  и  $b_2 a_{12} - b_1 a_{21}$  отлично от нуля, то система (4) решений не имеет;
- 2) Если оба числа  $b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$  и  $b_2 a_{12} - b_1 a_{21}$  равны нулю, то уравнения системы пропорциональны, и система может иметь бесконечно много решений (каждое из которых получается, если одну из неизвестных взять произвольно, а вторую вычислить с помощью любого из уравнений из системы), а может и не иметь решений.

Например, система  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2; \end{cases}$  имеет бесконечно много ре-

шений и  $x_2 = 1 - x_1$ . А система  $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 = 1, \end{cases}$  очевидно не имеет решений.

С помощью определителей формулы (5) для решения системы уравнений (4) могут быть записаны в виде:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (6)$$

Формулы (6) называют *формулами Крамера*<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> **КРАМЕР** Габриель (Cramer Gabriel) (31.07.1704, Женева,– 4.01.1752, Баньоль, близ Нима, Франция) – швейцарский математик. Установив и опубликовав в 1750 г. правило решения систем линейных уравнений с буквенными коэффициентами (правило Крамера), Крамер заложил основы теории определителей.

✓ Заметим, что в числителе первой формулы (6) стоит определитель матрицы, которая получена из матрицы  $A$  заменой ее первого столбца на столбец из элементов правой части системы (1), а в числителе второй – определитель матрицы, полученной из  $A$  заменой ее второго столбца на столбец из элементов правой части системы (1).

## Задания

№№ 22, 26, 36, 35, 39.



### Домашнее задание

[П] №№ 13, 16, 23, 27.

Для всех значений параметра  $a \in \mathbb{R}$  найдите решение си-

стемы: 
$$\begin{cases} 2x - ay = a, \\ x + 4y = 6 \end{cases}$$

**25.09.2023**

## Занятие № 2

[П]: № 82 (решение системы линейных уравнений с помощью определителей 2-го порядка).

**Определители 3-го порядка. Правило треугольника. Разложение определителя по элементам первой строки. Свойства определителей**

[П]: №№ 43, 64,

[П]: №№ 100, 102, 103, 106, 107, 111, 114, 115



## **Домашнее задание**

[П] №№ 45, 61, 101, 104, 105, 109, 112, 116, 83.