[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.
URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре**. http://bookre.org/reader?file=635343

22.09.2022

Занятие № 3

Действия с матрицами

1. **Суммой матриц** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Обозначение: $C=A+B$.

2. **Произведением матрицы** $A=(a_{ij})$ **на число** λ называется матрица C, элементы которой определяются равенством $c_{ij}=\lambda a_{ij}$. Обозначение: $C=\lambda A$.

3. **Произведением матрицы** $A=(a_{ij})$ размера $m\times k$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $k\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times$ n, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pj}.$$

Обозначение: $C=AB$. **Произведение определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя). При этом число строк матрицы C равно числу строк матрицы A, а число столбцов – числу столбцов матрицы B:**

$$[k \times n] \cdot [n \times m] = [k \times m].$$

4. Матрица $A^T = \left(\tilde{a}_{ij}\right)$ является **транспонированной к матрице** $A = \left(a_{ij}\right)$, если ее элементы определяются равенством $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$. Таким образом, строки матрицы A^T являются соответствующими столбцами матрицы A.

Свойства арифметических операций с матрицами:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$;
3) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
5) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
6) $A(BC) = (AB)C$;
7) $A(B+C) = AB + AC$;
8) $(\lambda A)B = A(\lambda B)$;
9) $(A^T)^T = A$;
10) $(AB)^T = B^T A^T$.

Задание 1

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответы:

1) $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$	2) $AB = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$; $\quad BA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$

Задание 2

Для матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$

Найдите $(3A-2B)C^T$.

Ответ: $\begin{pmatrix}25 & -16 & 13\\ 9 & -5 & 10\\ 140 & -87 & 91\end{pmatrix}$

Задание 3

Найдите *f*(A), если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $\quad f(x)=x^2-7x-2.$

Замечание[1]. $f(A)=A^2-7A-2E$, где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A.

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Задание 4

Для любого натурального *n* найдите

1) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$; 2) № 802: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

Ответы:

1) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;	2) $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$.

---

[1] Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ - многочлен от переменной x. Под ***многочленом от матрицы*** понимается выражение

$$f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE,$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и квадратная матрица A.

Домашнее задание

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -1 & -3\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 3\\ -2 & -2 & -1 & -3\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

[**П**]: №№ **801, 805, 815(а,б), 827, 829.**

Для любого натурального n **найдите** $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n$.

Самостоятельно разобрать решение задания

Задание

Докажите, что $(AB)^T = B^T A^T$, матрицы в правой и левой части равенства существуют.

Доказательство. Пусть матрица A имеет размеры $\mathrm{n}\times\mathrm{m}$, матрица B - $\mathrm{m}\times\mathrm{k}$. Обозначим $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. Матрица C имеет размеры $\mathrm{n}\times\mathrm{k}$, а транспонированная матрица C^{T} – размеры $\mathrm{k}\times\mathrm{n}$. Для элементов матрицы C^{T} имеем:

$$c_{si}^T = c_{is} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js},\quad i = 1,2,\ldots,n,\ s = 1,2,\ldots,k.$$

С другой стороны, матрицы B^{T} и A^{T} имеют размеры $\mathrm{k}\times\mathrm{m}$ и $\mathrm{m}\times\mathrm{n}$ соответственно, и

$$b_{sj}^T = b_{js},\quad a_{ji}^T = a_{ij},\quad i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m;\ \ s = 1,2,\ldots,k.$$

Обозначим $\mathrm{D} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$. Матрица D имеет размеры $\mathrm{k}\times\mathrm{n}$ и для ее элементов имеем:

$$d_{si}=\sum_{j=1}^{m} b_{sj}^{T} a_{ji}^{T}=\sum_{j=1}^{m} b_{js} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js}=c_{is}=c_{si}^{T}, \quad s=1,2,\ldots,k; \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Из равенства элементов матриц D и C^{T} следует $\mathrm{C}^{\mathrm{T}}=\mathrm{D}$. Таким образом, $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}=\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

27.09.2022

Занятие № 4

Действия с матрицами

Задание 5. (№ 815 (а)).

Докажите, что если A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка, причем $AB \neq BA$, то $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

Замечание. Если матрицы A и B перестановочны (т.е. $AB = BA$), то $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.

Задание 7.

На какую матрицу и как (справа или слева) надо умножить матрицу A порядка $n \times m$, чтобы получить матрицу, совпадающую с k-м столбцом матрицы A.

$$A \cdot S, \text{ где } S - \text{столбец из } m \text{ элементов } s_j=\begin{cases}0, & j \neq k, \\ 1, & j=k.\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & 4 \\ 5 & 6 & \boxed{7} & 8 \\ -1 & -2 & \boxed{-3} & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

На какую матрицу и как надо умножить матрицу A порядка $n \times m$, чтобы получить матрицу, совпадающую с k-ой строкой матрицы A.

$S \cdot A$, *где* S – *строка из* n *элементов* $s_j = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$

$$(0 \;\; 1 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{5 \quad 6 \quad 7 \quad 8} \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = (5 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8)$$

Примеры выделения из матрицы отдельных столбцов и строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$