



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** — СПб.: Издательство «Лань», 2010. URL: <http://elibrary.sgu.ru/uch lit/560.pdf>

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

15.12.2021

Занятие № 14

Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

№ 1175

№ 1175

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &= (x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2) - (2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = \end{aligned}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2 \left(x_3^2 - 2x_2x_3 + \frac{x_2^2}{4} \right) - \frac{x_2^2}{2} - 3x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2 \left(x_3 - \frac{x_2}{2} \right)^2 - \frac{7}{2}x_2^2 = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{7}{2}y_3^2 = \tilde{Q}(y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ y_3 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_3 - y_2 - \frac{1}{2}y_3 = y_1 - y_2 - \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$z = By \quad \tilde{A} = B^T A B$$

$$B^T A B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

№ 1178

N 1178

$$Q(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_4 +$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases} \quad x = B_1 y \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} & + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_4 + y_3 y_4 = \\ & = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 y_3 + 2y_1 y_4 + y_3 y_4 \\ & = -y_2^2 + (y_1^2 + 2y_1(y_3 + y_4) + (y_3 + y_4)^2) - (y_3 + y_4)^2 + y_3 y_4 = \\ & = -y_2^2 + (y_1 + y_3 + y_4)^2 - y_3^2 - y_3 y_4 - y_4^2 = \\ & = -y_2^2 + (y_1 + y_3 + y_4)^2 - (y_3 + \frac{y_4}{2})^2 - \frac{3}{4}y_4^2 = -z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - \frac{3}{4}z_4^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1 = y_2 \\ z_2 = y_1 + y_3 + y_4 \\ z_3 = y_3 + \frac{y_4}{2} \\ z_4 = y_4 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = z_2 - z_3 + \frac{1}{2}z_4 - z_4 \\ y_2 = z_1 \\ y_3 = z_3 - \frac{1}{2}z_4 \\ y_4 = z_4 \end{cases} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} & = \tilde{Q}(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ & \quad B = B_1 B_2 \\ & \quad \underline{\underline{x = Bz}} \end{aligned}$$

№ 1191

N 1191.

$$f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1 x_2 - 18x_1 x_3 + 40x_2 x_3$$

$$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1 y_2$$

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

$$g(y_1, y_2, y_3)$$

$$X = B_1 Z$$

$$Y = B_2 Z$$

$$h(z_1, z_2, z_3)$$

$$Z = B_2^{-1} Y$$

$$X = B_1 (B_2^{-1} Y)$$

1. Разложение f

$$X = B_1 Z$$

$$3x_1^2 - 6x_1(2x_2 + 3x_3) + 3(2x_2 + 3x_3)^2 - 4x_2^2 - 36x_2 x_3 -$$

$$-27x_3^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 + 40x_2x_3 = 3(x_1 - 2x_2 - 3x_3)^2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 = 3(x_1 - 2x_2 - 3x_3)^2 - 2(x_2 - x_3)^2 \ominus$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{3}(x_1 - 2x_2 - 3x_3) \\ z_2 = \sqrt{2}(x_2 - x_3) \\ z_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{z_1}{\sqrt{3}} + 2z_2 + 5z_3 \\ x_2 = \frac{z_2}{\sqrt{2}} + x_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\ominus z_1^2 - z_2^2 + 0 \cdot z_3^2$$

2) Составим г.

$$Y = B_2 Z$$

$$6(y_2^2 + 2y_1y_2 + y_1^2) - 6y_1^2 + 5y_1^2 = 6(y_2 + y_1)^2 - 2y_1^2 \ominus$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{6}(y_1 + y_2) \\ z_2 = y_1 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad Z = B_2^{-1} Y \quad \begin{cases} y_1 = z_2 \\ y_2 = \frac{z_1}{\sqrt{6}} - z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\ominus z_1^2 - z_2^2 + 0 \cdot z_3^2$$



Домашнее задание

№ 1178 (определить матрицу преобразования B);

№ 1176, № 1184,

№ 1191 (определить матрицу преобразования);

№ 1248 (найти собственные значения и вектора матрицы квадратичной формы, проверить ортогональность векторов)

Подготовка к контрольной работе 22.12.21. Задания:

- собственные значения и собственные векторы матрицы,
- приведение квадратичной формы к каноническому виду,
- построение обратной матрицы.