



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

8.12.2021

Занятие № 13

Собственные значения и собственные вектора матрицы

1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Ответы:

а) $\lambda_1 = 1, X_1 = (1; 1)^T; \quad \lambda_2 = 3, X_2 = (1; -1)^T;$

б) $\lambda_1 = 3, X_1 = (1; 1)^T; \quad \lambda_2 = 5, X_2 = (1; -1)^T.$

2. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ответы:

а) $\lambda_2 = 2, X_1 = (1; 1; 0)^T;$

$\lambda_2 = 3, X_2 = \alpha(2; 1; 0)^T + \beta(0; 0; 1)^T, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$

3. При каких значениях параметра a матрица A имеет собственный вектор v :

а)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

Ответы: а) $a = 3$; б) $a = 4$.

4. Проверьте, что вектор X является собственным вектором матрицы A и найдите соответствующее ему собственное значение:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответы: а) $\lambda = 2$; б) $\lambda = -4$.

5. **Обратная задача.** Восстановление матрицы по спектру ее собственных значений и соответствующих собственным векторов.

Если известны n линейно независимых собственных вектора X_1, X_2, \dots, X_n , и соответствующие им собственные значения

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то матрицу A можно найти по следующей формуле

$$A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}, \text{ где } S = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ и } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$



Домашнее задание

[П]: №№ 1(б), 2(б), 3(б), 4(б).