



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: [http://elibrary.sgu.ru/uch\\_lit/560.pdf](http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf)

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

---

**22.09.2021**

**Занятие № 3**

### **Действия с матрицами**

1. **Суммой матриц**  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  одинаковой размерности называется матрица  $C = (c_{ij})$ , элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ , т.е.  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Обозначение:  $C = A + B$ .
2. **Произведением матрицы**  $A = (a_{ij})$  **на число**  $\lambda$  называется матрица  $C$ , элементы которой определяются равенством  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ . Обозначение:  $C = \lambda A$ .
3. **Произведением матрицы**  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times k$  **на матрицу**  $B = (b_{ij})$  размера  $k \times n$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размера  $m \times n$ , элементы которой определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{p=1}^k a_{ip}b_{pj}.$$

Обозначение:  $C = AB$ . **Произведение определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы  $A$  (первого сомножителя) равно числу строк матрицы  $B$  (второго сомножителя).** При этом число строк матрицы  $C$  равно числу строк матрицы  $A$ , а число столбцов – числу столбцов матрицы  $B$ :

$$[k \times n] \cdot [n \times m] = [k \times m].$$

4. Матрица  $A^T = (\tilde{a}_{ij})$  является **транспонированной** к матрице  $A = (a_{ij})$ , если ее элементы определяются равенством  $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$ . Таким образом, строки матрицы  $A^T$  являются соответствующими столбцами матрицы  $A$ .

**Свойства арифметических операций с матрицами:**

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1) $A + B = B + A$ ;                          | 6) $A(BC) = (AB)C$ ;               |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;              | 7) $A(B + C) = AB + AC$ ;          |
| 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ; | 8) $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ ; |
| 4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ;   | 9) $(A^T)^T = A$ ;                 |
| 5) $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;                  | 10) $(AB)^T = B^T A^T$ .           |

### Задание 1

Для матриц  $A$  и  $B$  найдите произведения  $AB$  и  $BA$ :

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Ответы:**

|  |  |
|--|--|
| 1) $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$ | 2) $AB = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$ |
|--|--|

### Задание 2

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдите  $(3A - 2B)C^T$ .

**Ответ:**  $\begin{pmatrix} 25 & -16 & 13 \\ 9 & -5 & 10 \\ 140 & -87 & 91 \end{pmatrix}$

### Задание 3

Найдите  $f(A)$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = x^2 - 7x - 2$ .

*Замечание<sup>1</sup>.*  $f(A) = A^2 - 7A - 2E$ , где  $E$  – единичная матрица той же размерности, что и матрица  $A$ .

**Ответ:**  $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Задание 4

Для любого натурального  $n$  найдите

1)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ; 2) № 802:  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$ .

**Ответы:**

|   |  |
|---|--|
| 1) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; | 2) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ . |
|---|--|

<sup>1</sup> Пусть  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  – многочлен от переменной  $x$ .

Под **многочленом от матрицы** понимается выражение

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE,$$

где  $E$  – единичная матрица той же размерности, что и квадратная матрица  $A$ .

### Задание 5. (№ 815 (а)).

Докажите, что если  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы одного и того же порядка, причем  $AB \neq BA$ , то  $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ .

*Замечание.* Если матрицы  $A$  и  $B$  перестановочны (т.е.  $AB = BA$ ), то  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .

### Задание 7.

На какую матрицу и как (справа или слева) надо умножить матрицу  $A$ , чтобы получить матрицу, совпадающую с первым столбцом матрицы  $A$ .

На какую матрицу и как надо умножить матрицу  $A$ , чтобы получить матрицу, совпадающую с первой строкой матрицы  $A$ .

### Задание 8.

Найдите произведения  $AB$  и  $BA$  матриц  $A$  и  $B$  и установите, как при этом меняются столбцы и строки матрицы  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

На какую матрицу надо умножить матрицу  $B$ , чтобы получить

матрицы  $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ ?



## Домашнее задание

Для матриц  $A$  и  $B$  найдите произведения  $AB$  и  $BA$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[П]: №№ 801, 805, 815(6), 827, 829.

Для любого натурального  $n$  найдите  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ .

## Самостоятельно разобрать решение задания

### Задание 6.

Докажите, что  $(AB)^T = B^T A^T$ , матрицы в правой и левой части равенства существуют.

**Доказательство.** Пусть матрица  $A$  имеет размеры  $n \times m$ , матрица  $B$  –  $m \times k$ . Обозначим  $C = AB$ . Матрица  $C$  имеет размеры  $n \times k$ , а транспонированная матрица  $C^T$  – размеры  $k \times n$ . Для элементов матрицы  $C^T$  имеем:

$$c_{si}^T = c_{is} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{js}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

С другой стороны, матрицы  $B^T$  и  $A^T$  имеют размеры  $k \times m$  и  $m \times n$  соответственно, и

$$b_{sj}^T = b_{js}, \quad a_{ji}^T = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Обозначим  $D = B^T A^T$ . Матрица  $D$  имеет размеры  $k \times n$  и для ее элементов имеем:

$$d_{si} = \sum_{j=1}^m b_{sj}^T a_{ji}^T = \sum_{j=1}^m b_{js} a_{ij} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{js} = c_{is} = c_{si}^T, \quad s = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из равенства элементов матриц  $D$  и  $C^T$  следует  $C^T = D$ . Таким образом,  $(AB)^T = B^T A^T$ .