



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

19.09.2019

Занятие № 2

Действия с матрицами

1. **Суммой матриц** $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$.
2. **Произведением матрицы** $A = (a_{ij})$ **на число** λ называется матрица C , элементы которой определяются равенством $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Обозначение: $C = \lambda A$.
3. **Произведением матрицы** $A = (a_{ij})$ размера $m \times k$ **на матрицу** $B = (b_{ij})$ размера $k \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{p=1}^k a_{ip}b_{pj}.$$

Обозначение: $C = AB$. **Произведение определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя).** При этом число строк матрицы C равно числу строк матрицы A , а число столбцов – числу столбцов матрицы B :

$$[k \times n] \cdot [n \times m] = [k \times m].$$

4. Матрица $A^T = (\tilde{a}_{ij})$ является **транспонированной** к матрице $A = (a_{ij})$, если ее элементы определяются равенством $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$. Таким образом, строки матрицы A^T являются соответствующими столбцами матрицы A .

Свойства арифметических операций с матрицами:

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1) $A + B = B + A$; | 6) $A(BC) = (AB)C$; |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$; | 7) $A(B + C) = AB + AC$; |
| 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; | 8) $(\lambda A)B = A(\lambda B)$; |
| 4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; | 9) $(AB)^T = B^T A^T$. |
| 5) $(A + B)^T = A^T + B^T$; | |

Задание 1

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA :

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответы:

1) $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$	2) $AB = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$
--	--

Задание 2

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

найдите:

а) $(3A - 2B)C^T$,

б) $(3A^T - 2B^T)C$.

Ответы:

<p>а) $\begin{pmatrix} 25 & -16 & 13 \\ 9 & -5 & 10 \\ 140 & -87 & 91 \end{pmatrix}$</p>	<p>б) $\begin{pmatrix} 34 & -91 \\ -19 & 77 \end{pmatrix}$</p>
---	---

Задание 3

Найдите $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 7x - 2$.

*Замечание*¹. $f(A) = A^2 - 7A - 2E$, где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A .

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Домашнее задание

[П]: №№ 101, 104, 105, 109, 112, 116.

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA :

¹ Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен от переменной x .

Под **многочленом от матрицы** понимается выражение

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE,$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и квадратная матрица A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

26.09.2019

Занятие № 3

Действия с матрицами

Произведение матриц, степень матрицы

Задание 4

Для любого натурального n найдите

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$.

Ответы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
---	--

Задание 5. На какую матрицу и как (справа или слева) надо умножить матрицу A , чтобы получить матрицу, совпадающую с первым столбцом матрицы A .

На какую матрицу и как надо умножить матрицу A , чтобы получить матрицу, совпадающую с первой строкой матрицы A .

№№ 801, 802,

Задание 6. Докажите, что $(A+B)C = AC + BC$. Какие размеры при этом должны иметь матрицы A , B и C ?

№№ 815(а), 822.



Домашнее задание

[П]: №№ 801, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$, 829, 805, 815 (6), 827.

Дополнение

Задание

Найдите произведения AB и BA матриц A и B и установите, как при этом меняются столбцы и строки матрицы B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Заметим, что матрица A получена из единичной, в которой меняются местами второй и третий столбец (или вторая и третья строка).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

При умножении на матрицу A **слева** **меняются** местами вторая и третья **строки** матрицы B

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

При умножении на матрицу A **справа** **меняются** местами второй и третий **столбцы** матрицы B



На какую матрицу надо умножить матрицу B , чтобы полу-

чить матрицы $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$?