



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

29.11.2018

Занятие № 12

Собственные значения и собственные вектора матрицы

1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Ответы:

а) $\lambda_1 = 1, X_1 = (1; 1)^T;$

б) $\lambda_1 = 3, X_1 = (1; 1)^T;$

$\lambda_2 = 1, X_2 = (1; -1)^T;$

$\lambda_2 = 5, X_2 = (1; -1)^T.$

2. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ответы:

а) $\lambda_2 = 1, X_1 = (1; 1; 0)^T;$

$\lambda_2 = 3, X_2 = \alpha(2; 1; 0)^T + \beta(0; 0; 1)^T, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$

3. При каких значениях параметра a матрица A имеет собственный вектор v :

а)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

Ответы: а) $a = 3$; б) $a = 4$.

4. Проверьте, что вектор X является собственным вектором матрицы A и найдите соответствующее ему собственное значение:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответы: а) $\lambda = 2$; б) $\lambda = -4$.

5. Найдите все собственные значения матрицы A из № 4(а).

Ответы: а) $\lambda = \pm 2$; ± 3 .

6. Найдите множество собственных векторов матрицы A , соответствующих заданному собственному значению, решив однородную систему линейных уравнений:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 90 \\ 4 & 46 & 21 & 400 \\ 5 & 55 & 28 & 490 \\ 7 & 77 & 37 & 712 \end{pmatrix}, \quad \lambda=2;$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 5 & 50 \\ 3 & -27 & 16 & 167 \\ 2 & -20 & 14 & 117 \\ 4 & -40 & 21 & 220 \end{pmatrix}, \quad \lambda=3;$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 40 \\ 3 & 20 & 25 & 133 \\ 2 & 14 & 16 & 93 \\ 4 & 28 & 31 & 146 \end{pmatrix}, \quad \lambda=-1.$$

Ответы:

$$\text{а) } \alpha(-11; 1; 0; 0)^T + \beta(110; 0; -40; 1)^T, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

7. Постройте характеристическое уравнение для матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad b_i > 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

и докажете, что матрица имеет единственное положительное собственное значение.

Ответ:

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} - \dots - a_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} b_i - a_n \prod_{i=1}^{n-1} b_i = 0.$$



Домашнее задание

[П]: №№ 1(б), 2(б), 3(б), 4(б).