



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: [http://elibrary.sgu.ru/uch\\_lit/560.pdf](http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf)

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

---

**20.09.2018**

**Занятие № 2**

### **Действия с матрицами**

1. **Суммой матриц**  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  одинаковой размерности называется матрица  $C = (c_{ij})$ , элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ , т.е.  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Обозначение:  $C = A + B$ .
2. **Произведением матрицы**  $A = (a_{ij})$  **на число**  $\lambda$  называется матрица  $C$ , элементы которой определяются равенством  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ . Обозначение:  $C = \lambda A$ .
3. **Произведением матрицы**  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times k$  **на матрицу**  $B = (b_{ij})$  размера  $k \times n$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размера  $m \times n$ , элементы которой определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{p=1}^k a_{ip}b_{pj}.$$

Обозначение:  $C = AB$ . **Произведение определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы  $A$  (первого сомножителя) равно числу строк матрицы  $B$  (второго сомножителя).** При этом число строк матрицы  $C$  равно числу строк матрицы  $A$ , а число столбцов – числу столбцов матрицы  $B$ :

$$[k \times n] \cdot [n \times m] = [k \times m].$$

4. Матрица  $A^T = (\tilde{a}_{ij})$  является **транспонированной** к матрице  $A = (a_{ij})$ , если ее элементы определяются равенством  $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$ . Таким образом, строки матрицы  $A^T$  являются соответствующими столбцами матрицы  $A$ .

**Свойства арифметических операций с матрицами:**

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1) $A + B = B + A$ ;                          | 6) $A(BC) = (AB)C$ ;               |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;              | 7) $A(B + C) = AB + AC$ ;          |
| 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ; | 8) $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ ; |
| 4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ;   | 9) $(AB)^T = B^T A^T$ .            |
| 5) $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;                  |                                    |

### Задание 1

Для матриц  $A$  и  $B$  найдите произведения  $AB$  и  $BA$ :

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Ответы:**

1) $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$	2) $AB = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$
--	--

### Задание 2

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

найдите:

а)  $(3A - 2B)C^T$ ,

б)  $(3A^T - 2B^T)C$ .

**Ответы:**

<p>а) <math>\begin{pmatrix} 25 &amp; -16 &amp; 13 \\ 9 &amp; -5 &amp; 10 \\ 140 &amp; -87 &amp; 91 \end{pmatrix}</math></p>	<p>б) <math>\begin{pmatrix} 34 &amp; -91 \\ -19 &amp; 77 \end{pmatrix}</math></p>
---	---

### Задание 3

Найдите  $f(A)$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = x^2 - 7x - 2$ .

*Замечание*<sup>1</sup>.  $f(A) = A^2 - 7A - 2E$ , где  $E$  – единичная матрица той же размерности, что и матрица  $A$ .

**Ответ:**  $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Задание 4

Для любого натурального  $n$  найдите

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ;    б)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ .

<sup>1</sup> Пусть  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  – многочлен от переменной  $x$ .

Под **многочленом от матрицы** понимается выражение

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE,$$

где  $E$  – единичная матрица той же размерности, что и квадратная матрица  $A$ .

## Ответы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
---	--

№№ 808, 815(а), 829, 816



## Домашнее задание

[П]: №№ 101, 104, 105, 109, 112, 116, 805, 815(б), 827.

Для матриц  $A$  и  $B$  найдите произведения  $AB$  и  $BA$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**27.09.2018**

## Занятие № 3

### Действия с матрицами

#### Произведение матриц, степень матрицы

##### Задание 1

Найдите произведения  $AB$  и  $BA$  матриц  $A$  и  $B$  и установите, как при этом меняются столбцы и строки матрицы  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Решение:

Заметим, что матрица  $A$  получена из единичной, в которой меняются местами второй и третий столбец (или вторая и третья строка).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

При умножении на матрицу  $A$  **слева** **меняются** местами вторая и третья **строки** матрицы  $B$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

При умножении на матрицу  $A$  **справа** **меняются** местами второй и третий **столбцы** матрицы  $B$



На какую матрицу надо умножить матрицу  $B$ , чтобы полу-

чить матрицы  $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$  ?

№№ 802, 816, 834.



## Домашнее задание

[П]: №№ 801,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ .