



[П] Проскуряков И.В. **Сборник задач по линейной алгебре.** – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

URL: <http://elibrary.sgu.ru/uch/lit/560.pdf>

[Ф] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. **Сборник задач по высшей алгебре.** <http://bookre.org/reader?file=635343>

25.09.2020

Занятие № 2 (продолжение)

Действия с матрицами

1. **Суммой матриц** $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются суммой соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$.
2. **Произведением матрицы** $A = (a_{ij})$ **на число** λ называется матрица C , элементы которой определяются равенством $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Обозначение: $C = \lambda A$.

Свойства операций

- 1) $A + B = B + A$;
 - 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
 - 3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
 - 4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
 - 5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
3. **Произведением матрицы** $A = (a_{ij})$ размера $m \times k$ **на матрицу** $B = (b_{ij})$ размера $k \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{p=1}^k a_{ip}b_{pj}.$$

Обозначение: $C = AB$. Произведение определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя). При этом число строк матрицы C равно числу строк матрицы A , а число столбцов – числу столбцов матрицы B :

$$[k \times n] \cdot [n \times m] = [k \times m].$$

2.10.2020

Занятие № 3

Действия с матрицами

Задание 1

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA :

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответы:

1) $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$	2) $AB = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$
--	--

Задание 2

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдите $(3A - 2B)C^T$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 25 & -16 & 13 \\ 9 & -5 & 10 \\ 140 & -87 & 91 \end{pmatrix}$

Задание 3

Найдите $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 7x - 2$.

Замечание¹. $f(A) = A^2 - 7A - 2E$, где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A .

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 4

Для любого натурального n найдите

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; 2) № 802: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$.

Ответы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;	2) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.
---	--

¹ Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен от переменной x .

Под **многочленом от матрицы** понимается выражение

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE,$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и квадратная матрица A .

Задание 5. (№ 815 (а)).

Докажите, что если A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка, причем $AB \neq BA$, то $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Замечание. Если матрицы A и B перестановочны (т.е. $AB = BA$), то $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Задание 6.

Докажите, что $(AB)^T = B^T A^T$, матрицы в правой и левой части равенства существуют.

Доказательство. Пусть матрица A имеет размеры $n \times m$, матрица B – $m \times k$. Обозначим $C = AB$. Матрица C имеет размеры $n \times k$, а транспонированная матрица C^T – размеры $k \times n$. Для элементов матрицы C^T имеем:

$$c_{si}^T = c_{is} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{js}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

С другой стороны, матрицы B^T и A^T имеют размеры $k \times m$ и $m \times n$ соответственно, и

$$b_{sj}^T = b_{js}, \quad a_{ji}^T = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Обозначим $D = B^T A^T$. Матрица D имеет размеры $k \times n$ и для ее элементов имеем:

$$d_{si} = \sum_{j=1}^m b_{sj}^T a_{ji}^T = \sum_{j=1}^m b_{js} a_{ij} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{js} = c_{is} = c_{si}^T, \quad s = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из равенства элементов матриц D и C^T следует $C^T = D$. Таким образом, $(AB)^T = B^T A^T$.

Задание 7.

На какую матрицу и как (справа или слева) надо умножить матрицу A , чтобы получить матрицу, совпадающую с первым столбцом матрицы A .

На какую матрицу и как надо умножить матрицу A , чтобы получить матрицу, совпадающую с первой строкой матрицы A .



Домашнее задание

Для матриц A и B найдите произведения AB и BA :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[П]: №№ 801, 805, 815(6), 827, 829.

Для любого натурального n найдите $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.