

## Занятие № 12

### Собственные значения и собственные векторы матрицы

1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. При каких значениях параметра  $a$  матрица  $A$  имеет собственный вектор  $v$ :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

4. Проверьте, что вектор  $X$  является собственным вектором матрицы  $A$  и найдите соответствующее ему собственное значение:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите множество собственных векторов матрицы  $A$ , соответствующих заданному собственному значению, решив однородную систему линейных уравнений:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 90 \\ 4 & 46 & 21 & 400 \\ 5 & 55 & 28 & 490 \\ 7 & 77 & 37 & 712 \end{pmatrix}, \quad \lambda=2;$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 5 & 50 \\ 3 & -27 & 16 & 167 \\ 2 & -20 & 14 & 117 \\ 4 & -40 & 21 & 220 \end{pmatrix}, \quad \lambda=3;$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 40 \\ 3 & 20 & 25 & 133 \\ 2 & 14 & 16 & 93 \\ 4 & 28 & 31 & 146 \end{pmatrix}, \quad \lambda=-1.$$