Пример решения задачи

Матрица перехода. Координаты вектора в базисе

В линейном 3-мерном пространстве заданы два базиса $\{\boldsymbol{e}\} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $\{\boldsymbol{e}'\} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$:

$$\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 1;\ 1),\quad \boldsymbol{e}_2 = (2;\ 1;\ 1),\quad \boldsymbol{e}_3 = (1;\ 1;\ 3);$$
$$\boldsymbol{e}'_1 = (0;\ 1;\ 1),\quad \boldsymbol{e}'_2 = (1;\ 0;\ 1),\quad \boldsymbol{e}'_3 = (1;\ 0;\ 2)$$

и вектор $\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Найти:

1) матрицу перехода P от базиса $\{\boldsymbol{e}\}$ к базису $\{\boldsymbol{e}'\}$;
2) матрицу обратного перехода P^{-1};
3) координаты вектора $\boldsymbol{e}_1$ в базисах $\{\boldsymbol{e}\}$ и $\{\boldsymbol{e}'\}$;
4) координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'\}$.

Составим для базисов $\{\boldsymbol{e}\}$ и $\{\boldsymbol{e}'\}$ матрицы F и G соответственно:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

> Покажите, что матрицы F и G являются невырожденными, т.е. имеют определители, отличные от нуля. И, следовательно, имеют обратные.

В матричном виде связь между двумя заданными базисами выражена равенством $G = FP$, где P – матрица перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}\}$ к базису $\{\boldsymbol{e}'\}$.

1) Найдем матрицу перехода P от базиса $\{\boldsymbol{e}\}$ к базису $\{\boldsymbol{e}'\}$: $P = F^{-1}G$

> Покажите, что $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 5/2 & -1/2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3/2 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу обратного перехода P^{-1}

Покажите, что $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

3) Найдем координаты вектора $\boldsymbol{e}_1$ в базисах $\{\boldsymbol{e}\}$ и $\{\boldsymbol{e}'\}$

Так как $\boldsymbol{e}_1=1\cdot\boldsymbol{e}_1+0\cdot\boldsymbol{e}_2+0\cdot\boldsymbol{e}_3$, то вектор $\boldsymbol{e}_1$ в базисе $\{\boldsymbol{e}\}$ имеет координаты $(1;\ 0;\ 0)$.

Координаты вектора $\boldsymbol{e}_1$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'\}$ найдем по формуле: $X'=P^{-1}X$,

где $X=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ - координаты вектора $\boldsymbol{e}_1$ в базисе $\{\boldsymbol{e}\}$, а X' - координаты вектора $\boldsymbol{e}_1$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'\}$. Будем иметь:

$$X'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

4) Найдем координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'\}$

Используя формулу $X'=P^{-1}X$, где $X=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$ - координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}\}$, а X' - координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'\}$, получим:

$$X'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 22\\ -10\end{pmatrix}.$$