Лекция № 9

Собственные значения и векторы матрицы

Пусть $A=\{a_{ij}\}$ квадратная матрица порядка n, $i, j=\overline{1,n}$.

Определение. Ненулевой вектор

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

для которого существует число λ, при котором справедливо равенство

$$AX=\lambda X, \qquad (1)$$

называется *собственным вектором* матрицы A. Число λ называется *собственным значением* матрицы A.

Говорят, что собственный вектор X соответствует собственному значению λ.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы. Приведенное в определении равенство (1) можно переписать в виде:

$$(A-\lambda E)X=\mathbf{0}, \qquad (2)$$

где E – единичная матрица порядка n, $\mathbf{0}$ – нулевой вектор-столбец.

Матричное уравнение (2) равносильно системе n линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1,\ x_2,\dots,x_n$. При этом уравнение (2) имеет ненулевое решение $X\neq\mathbf{0}$, если определитель матрицы $A-\lambda E$ равен нулю:

$$|A-\lambda E|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Таким образом, задача нахождения собственных значений матрицы A свелась к решению уравнения (3).

Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением матрицы* A. При этом матрицу $A-\lambda E$ называют *характеристической матрицей.*

Определитель в уравнении (3) является многочленом порядка n**:**

$$P_n(\lambda)=|A-\lambda E|=(-1)^n\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_n. \quad (4)$$

Многочлен $P_n(\lambda)$ называют *характеристическим многочленом матрицы* A. Характеристический многочлен можно представить в виде:

$$P_n(\lambda)=|A-\lambda E|=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{n_k}, \quad (5)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ – различные корни многочлена $(k\le n)$, $n_1,n_2,\ldots,n_k$ – соответствующие им кратности, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

Теорема. *Все корни характеристического уравнения (3) (нули характеристического многочлена (4) или (5)) и только они являются собственными значениями матрицы.*

Доказательство. Если число λ – собственное значение матрицы A, которому соответствует собственный вектор $X\neq\mathbf{0}$, то однородная система уравнений (2) имеет ненулевое решение. И, следовательно, матрица системы вырожденная, т.е. число λ удовлетворяет характеристическому уравнению (3). Наоборот, если λ – корень характеристического уравнения (3), то определитель матрицы $A-\lambda E$ однородной системы (2) равен нулю, т.е. $\operatorname{rang}(A-\lambda E)<n$. В этом случае система имеет бесконечное множество решений, включая ненулевые решения. Поэтому найдется вектор $X\neq\mathbf{0}$, удовлетворяющий условию

$$(A-\lambda E)X=\mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad AX=\lambda X.$$

Значит, λ – собственное значение матрицы A. □

С геометрической точки зрения собственный вектор указывает в пространстве направление[1], которое при линейном преобразовании $Y=AX$ не меняется и вдоль которого пространство испытывает «растяжение», а соответствующее этому вектору собственное значение определяет величину «растяжения» по указанному направлению.

[1] Под термином «направление» подразумевается прямая, проходящая через начало координат.

Свойства собственных векторов и собственных значений

1. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.*

◄ Пусть X_1 и X_2 – собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2, т. е. имеем:

$$AX_1=\lambda_1X_1,\quad AX_2=\lambda_2X_2,\quad \lambda_1\neq\lambda_2,\ \ X_1\neq 0,\ X_2\neq 0. \qquad (6)$$

Составим линейную комбинацию этих векторов $c_1X_1+c_2X_2$ и выясним, при каких коэффициентах c_1 и c_2 она будет нулевой:

$$c_1X_1+c_2X_2=0. \qquad (7)$$

Умножив обе части равенства (7) слева на матрицу A, учитывая условия (6), получим

$$A(c_1X_1+c_2X_2)=A\cdot 0 \quad\Leftrightarrow\quad c_1AX_1+c_2AX_2=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad c_1\lambda_1X_1+c_2\lambda_2X_2=0. \qquad (8)$$

Прибавим к полученному равенству равенство (7), умноженное на $(-\lambda_2)$, получим

$$c_1(\lambda_1-\lambda_2)X_1=0 \xrightarrow{\lambda_1\neq\lambda_2,\ X_1\neq 0} c_1=0.$$

Тогда при $c_1=0$ из равенства (7) следует $c_2=0$. Таким образом, вектора X_1 и X_2 линейно независимы.

Доказательство для любого конечного числа собственных векторов можно провести по индукции. Пусть система из $k-1$ собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, является линейно независимой, при этом будем иметь

$$AX_i=\lambda_iX_i,\quad \lambda_i\neq\lambda_j,\ \forall i\neq j,\ \ X_i\neq 0,\ \ i,j=\overline{1,k-1}. \qquad (9)$$

Добавим к этой системе еще один собственный вектор X_k, для которого будем иметь

$$AX_k=\lambda_kX_k,\quad \lambda_k\neq\lambda_i,\ \ i=\overline{1,k-1},\ \ X_k\neq 0. \qquad (10)$$

Составим из k векторов линейную комбинацию и выясним, при каких коэффициентах она будет нулевой:

$$c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_{k-1}X_{k-1}+c_kX_k=0. \qquad (11)$$

Умножив обе части равенства (11) слева на матрицу A, учитывая условия (9) и(10), получим

$$c_1\lambda_1 X_1 + c_2\lambda_2 X_2 + \ldots + c_{k-1}\lambda_{k-1} X_{k-1} + c_k\lambda_k X_k = 0. \qquad (12)$$

Прибавим к полученному равенству равенство (11), умноженное на ($-\lambda_k$), будем иметь

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k) X_1 + \ldots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) X_{k-1} = 0.$$

Учитывая линейную независимость векторов $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_{k-1}$, и условия $\lambda_k \neq \lambda_i,\ \ i = \overline{1, k-1}$, получим $c_i = 0,\ \ i = \overline{1, k-1}$. Тогда из равенства (11) найдем $c_k = 0$, так как $X_k \neq 0$. Таким образом, система из k собственных векторов линейна независима. ▶

2. *Ненулевая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному собственному значению, является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению.*

◀ Действительно, если собственному значению λ соответствуют собственные векторы $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_k$, то $AX_i = \lambda X_i,\ \ i = \overline{1, k}$, то для линейной комбинации

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k,$$

где коэффициенты $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ не все равны нулю, будем иметь:

$$A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k) = A(\alpha_1 X_1) + A(\alpha_2 X_2) + \ldots + A(\alpha_k X_k) =$$
$$= \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 + \ldots + \alpha_k AX_k = \alpha_1\lambda X_1 + \alpha_2\lambda X_2 + \ldots + \alpha_k\lambda X_k =$$
$$= \lambda(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k).$$ ▶

3. *Определитель матрицы равен произведению ее собственных значений (с учетом их кратности), т.е.*

$$|A| = \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_k^{n_k},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – *различные корни характеристического многочлена* $P_n(\lambda)$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – *соответствующие им кратности* $(k \le n)$.

◀ Рассматривая разложение характеристического многочлена, определяемое формулой (5), при $\lambda = 0$ будем иметь:

$$P_n(0) = |A| = (-1)^n(-\lambda_1)^{n_1}(-\lambda_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(-\lambda_k)^{n_k} =$$

$$=(-1)^n(-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_k}\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_k^{n_k}=(-1)^n(-1)^n\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_k^{n_k}=$$

$$=\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_k^{n_k}.$$ ▶

4. *Если матрица* A *является вырожденной, то среди ее собственных значений есть нулевое, и наоборот, если среди собственных значений матрицы* A *есть нулевое, то ее определитель равен нулю.*

Свойство является следствием свойства 4.

5. *Для симметричной матрицы собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны*.

◀ Пусть X_1 и X_2 – собственные векторы симметричной матрицы A, соответствующие разным собственным значениям λ_1 и λ_2. По условию имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{array}{c} A^T=A \quad (\textit{по определению симметричной матрицы}),\\ AX_1=\lambda_1X_1, \qquad AX_2=\lambda_2X_2. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Покажем, что скалярное произведение векторов X_1 и X_2 равно нулю, т.е. справедливо равенство:

$$(X_1,X_2)=X_1^TX_2=0.$$

Заметим, что $(X_1,X_2)=X_1^TX_2=X_2^TX_1=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^1x_i^2$, где

$$X_1=(x_1^1 \quad x_2^1 \quad \ldots \quad x_n^1)^T, \quad X_2=(x_1^2 \quad x_2^2 \quad \ldots \quad x_n^2)^T.$$

Умножим равенство $AX_2=\lambda_2X_2$ слева на матрицу X_1^T:

$$X_1^T(AX_2)=X_1^T(\lambda_2X_2)$$

и преобразуем его, используя свойства операций над матрицами и условия (*):

$$X_1^T(AX_2)=X_1^T(\lambda_2X_2) \;\Leftrightarrow\; (X_1^TA)X_2=\lambda_2X_1^TX_2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (X_1^TA^T)X_2=\lambda_2X_1^TX_2 \;\Leftrightarrow\; (AX_1)^TX_2=\lambda_2X_1^TX_2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\lambda_1X_1)^TX_2=\lambda_2X_1^TX_2 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1X_1^TX_2=\lambda_2X_1^TX_2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\lambda_1-\lambda_2)X_1^TX_2=0 \;\xrightarrow{\lambda_1\neq\lambda_2}\; X_1^TX_2=0.$$

Полученное равенство означает ортогональность векторов X_1 и X_2. ▶

6. *Пусть* $(A-\lambda E)^*$ *– союзная*[2] *матрица для характеристической матрицы* $(A-\lambda E)$. *Если* λ_0 *– собственное значение матрицы* A, *то любой ненулевой столбец матрицы* $(A-\lambda_0 E)^*$ *является собственным вектором, соответствующим собственному значению* λ_0.

◄ По свойству союзной матрицы[3] имеет место равенство:

$$(A-\lambda E)(A-\lambda E)^* = |A-\lambda E| \cdot E.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ получим

$$(A-\lambda_0 E)(A-\lambda_0 E)^* = 0.$$

Если X – ненулевой столбец матрицы $(A-\lambda_0 E)^*$, то $(A-\lambda_0 E)X = 0$. И, следовательно, $AX = \lambda_0 X$. Значит, X – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_0. ►

Докажите следующее утверждение:

Если вектор X является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ, то X является собственным вектором матрицы A^m (m-я степень матрицы A), соответствующим собственному значению λ^m.

Вычисление собственных значений и собственных векторов

Для нахождения собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы A порядка n надо выполнить следующие действия:

1. Составить характеристический многочлен матрицы $P_n(\lambda) = |A-\lambda E|$.
2. Найти все различные корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ характеристического уравнения $|A-\lambda E| = 0$ и их кратности $n_1, n_2, ..., n_k$ (заметим, что кратности корней находить не обязательно).

---

[2] Здесь для любой квадратной матрицы $C=\{c_{ij}\}$ элементами союзной матрицы C^* являются алгебраические дополнения к элементам c_{ji}. О союзной матрице см. Лекцию 7.

[3] Лемма. См. Лекцию 7.

3. Для каждого найденного корня $\lambda_i \ (i=1,2,...,k)$ найти фундаментальную систему $X_1^i,\ X_2^i,\ ...,\ X_{n-r}^i$ решений (ФСР) однородной системы уравнений:

$$(A-\lambda_i E)X=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

где $r=\operatorname{rang}(A-\lambda_i E)$.

Замечание 1. Если $n_i=1,$ то $r=n-1.$ В этом случае ФСР состоит из одного вектора.

Замечание 2. Учитывая свойство 6, для простого корня λ_i соответствующий собственный вектор можно найти, раскладывая определитель матрицы $A-\lambda_i E$ по одной из строк. Тогда ненулевой вектор, компоненты которого равны алгебраическим дополнениям элементов одной из строк матрицы $A-\lambda_i E,$ является собственным вектором.

4. Совокупность всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_i \ (i=1,2,...,k),$ записать в виде:

$$S_i = c_1 X_1^i + c_2 X_2^i + ... + c_{n-r} X_{n-r}^i,$$

где $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ – произвольные постоянные, не все равные нулю.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные вектора для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Будем действовать в соответствии с описанным выше алгоритмом. Составим характеристический многочлен матрицы A:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda)-4=\lambda^2-15\lambda+50.$$

Решая характеристическое уравнение, найдем собственные значения матрицы A:

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 10.$$

1) для $\lambda_1 = 5$ составим систему уравнений для нахождения соответствующего собственного вектора:

$$(A - \lambda_1 E)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-2II} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2x_1 + x_2 = 0.$$

Так как ранг матрицы системы равен 1, то ФСР состоит из одного вектора. В качестве свободной переменной возьмем переменную x_1 и выразим базисную переменную x_2 через свободную: $x_2 = -2x_1$. Полагая $x_1 = 1$, получим $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Тогда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 5$: $S_1 = c_1 X_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

где c_1 – отличная от нуля произвольная постоянная.

2) найдем собственный вектор, соответствующий второму собственному значению $\lambda_2 = 10$:

$$(A - \lambda_2 E)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}_{2I} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0.$$

Так как ранг матрицы системы равен 1, то ФСР состоит из одного вектора. В качестве свободной переменной возьмем переменную x_2 и выразим базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = 2x_2$. Полагая $x_2 = 1$, получим $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 10$: $S_2 = c_2 X_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, где c_2 – отличная от нуля произвольная постоянная. ■

Пример 2. Найти собственные значения и собственные вектора для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристический многочлен матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -\lambda \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda - \lambda^2 - 1) - (4 - 4\lambda - 3) - 2(4 - 3\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 =$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 9) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 3).$$

Решая характеристическое уравнение, найдем собственные значения:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1,\; \lambda_2 = 3,\; \lambda_3 = -3.$$

Таким образом, матрица имеет три различных собственных значения.

1) Для $\lambda_1 = 1$ найдем ФСР уравнения $(A - \lambda_1 E)X = 0$:

$$(A - \lambda_1 E)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +4I \\ +3I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы системы равен 2, то система имеет одну свободную переменную. Выберем в качестве базисных переменных x_1 и x_2. Выражая их через свободную x_3, получим:

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = -3x_3.$$

Полагая $x_3 = -1$, найдем

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u \quad S_1 = c_1 X_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1 \neq 0.$$

Замечание. Так как $\lambda_1 = 1$ является простым корнем, то вектор X_1, который является собственным вектором матрицы $A-\lambda_1 E$, можно найти и другим способом. В соответствии с замечанием 2 алгоритма найдем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

то

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 3$ является простым корнем. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Так как

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=7,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=11,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5,$$

то

$$X_2=\begin{pmatrix}7\\ 11\\ 5\end{pmatrix}\quad и \quad S_2=c_2X_2=c_2\begin{pmatrix}7\\ 11\\ 5\end{pmatrix},\quad \forall c_2\neq 0.$$

3) $\lambda_3=-3$ является простым корнем. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A-\lambda_3 E=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Так как

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=13,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-13,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-13$$

и

$$\begin{pmatrix}13\\ -13\\ -13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix},$$

то

$$X_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\quad и \quad S_3=c_3X_3=c_3\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix},\quad \forall c_3\neq 0.\quad ■$$

Пример 3. Найти собственные значения и собственные вектора для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристический многочлен матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda^2-15\lambda+9.$$ (проверьте!)

Найдем все корни характеристического уравнения:

$$|A-\lambda E|=0 \iff \lambda^3-7\lambda^2+15\lambda-9=0.$$

Заметим, что $\lambda = 1$ является корнем уравнения, поэтому

$$\lambda^3-7\lambda^2+15\lambda-9=0 \iff \lambda^2(\lambda-1)-6\lambda(\lambda-1)+9(\lambda-1)=0 \iff$$

$$\iff (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+9)=0 \iff (\lambda-1)(\lambda-3)^2=0.$$

Таким образом, матрица A имеет два различных собственных значения:

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$$

Второе собственное значение имеет кратность $n_2=2$.

1) Для $\lambda_1=1$ найдем ФСР уравнения $(A-\lambda_1E)X=0$:

$$(A-E)X=0 \iff \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}I\\ +II-I\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть x_3 – свободная неизвестная, тогда для базовых неизвестных будем иметь: $x_1=0,\ x_2=x_3$. Полагая $x_3=1$, найдем

$$X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad и \quad S_1=c_1X_1=c_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \ \forall c_1\neq 0.$$

Замечание. Если найти алгебраические дополнения элементов, например, первой строки матрицы $A-\lambda_1E$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}=-2,$$

то, учитывая, что $\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, найдем $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

2) Для $\lambda_2=3$ найдем ФСР уравнения $(A-\lambda_2E)X=0$:

$$(A-3E)X=0 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы системы равен 1, то система имеет две свободные неизвестные. При этом фундаментальная система решений состоит из двух линейно независимых решений X_1 и X_2. Выберем в качестве базисной переменной x_1. Для нее будем иметь $x_1=x_2+x_3$.

Вектор X_1 найдем, полагая $x_2=1,\ x_3=0$. Получим $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Полагая $x_2=0,\ x_3=1$, найдем $X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Таким образом, собственные вектора, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 3$, определяются как линейная комбинация найденных векторов, т.е.

$$S_2 = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1,\ c_2 :\ \ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Замечание. Так как матрица $A - \lambda_2 E$ имеет ранг, равный 1, то все ее миноры 2-го порядка равны нулю. А значит все столбцы соответствующей ей союзной матрицы являются нулевыми. ■

Пример 4. Найти собственные значения и собственные вектора для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристический многочлен матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2. \quad \text{(проверьте!)}$$

Найдем все корни характеристического уравнения:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Заметим, что $\lambda = 1$ является корнем уравнения, поэтому

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) - 3\lambda(\lambda - 1) + 2(\lambda - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0.$$

Таким образом, найдем два различных собственных значения матрицы:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2,$$

и соответствующие им кратности $n_1 = 2$ и $n_2 = 1$.

1) Для $\lambda_1 = 1$ найдем ФСР уравнения $(A - \lambda_1 E)X = 0$:

$$(A-E)X=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} -2III \\ -III \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2 ($r = 2$), поэтому система имеет одну свободную неизвестную ($n - r = 3 - 2 = 1$). Следовательно, ФСР состоит из одного вектора. В качестве свободной неизвестной можно выбрать x_2. Тогда для базисных неизвестных получим: $x_3 = 0$, $x_1 = x_2$. Полагая $x_2 = 1$, найдем

$$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad и \quad S_1=c_1X_1=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1 \neq 0.$$

Замечание. Так как ранг матрицы $A-E$ равен двум (в этом случае существует хотя бы один ненулевой столбец у соответствующей союзной матрицы $(A-E)^*$), то собственный вектор можно найти, вычислив алгебраические дополнения. Определим их для элементов первой строки матрицы $A-E$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 1$ будет вектор:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 2$ является простым корнем. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}4 & -5 & -3\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Так как

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-4 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=4,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2$$

и

$$\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

то

$$X_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\quad и\quad S_2=c_2X_2=c_2\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad \forall c_2\neq 0.\ \blacksquare$$

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.