

Лекция № 8

Арифметическое n -мерное пространство

1. Понятие арифметического n -мерного вектора. Действия над векторами

Определение 1. *Арифметическим n -мерным вектором называется любой упорядоченный набор из n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.*

Для обозначения арифметического вектора обычно используется запись $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называют координатами вектора $\vec{a}$.

Определим следующие действия с векторами:

1. Суммой двух векторов с одним и тем же числом координат

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ и } \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

называется вектор $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ с координатами $c_i = a_i + b_i \quad \forall i$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow c_i = a_i + b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

2. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c}$ с координатами $c_i = \lambda a_i \quad \forall i$:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow c_i = \lambda a_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

3. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с одним и тем же числом координат *равны*, если равны их соответствующие координаты:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Определение 2. Множество всех n -мерных векторов (как упорядоченных наборов чисел), для которых определены операции сложения и умножения на скаляр по правилам (1) и (2), называется *n -мерным арифметическим пространством*.

Число n называют *размерностью* арифметического пространства (АП).

Если координаты всех n -мерных векторов вещественные, то арифметическое пространство называют *вещественным*.

Если же векторы могут иметь комплексные координаты, то пространство называют *комплексным*.

В случае вещественного арифметического пространства вектора можно умножать только на вещественные скаляры ($\lambda \in \mathbb{R}$).

В арифметическом n -мерном пространстве есть вектор с нулевыми координатами $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Его будем называть *нуль-вектором*.

Вектор $(-1) \cdot \vec{a}$ обычно записывают $-\vec{a}$ и называют *противоположным* вектору $\vec{a}$.

Легко проверить, что введенные арифметические операции (1) и (2) обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}, \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \\ (\alpha\beta)\vec{a} &= \alpha(\beta\vec{a}), \\ (\alpha + \beta)\vec{a} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a}, \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0}, \\ 1 \cdot \vec{a} &= \vec{a}.\end{aligned}$$

Перечисленные условия называют *аксиомами линейного пространства*. Таким образом, n -мерное арифметическое пространство является линейным (ЛП).

Что касается операции вычитания векторов, то она вводится как действие, обратное сложению. *Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* с одним и тем же числом координат называется вектор $\vec{c}$ с координатами $c_i = a_i - b_i, \forall i$:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow c_i = a_i - b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

С помощью операций сложения векторов и умножения их на скаляр из k n -мерных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ можно составить новый n -мерный вектор:

$$\vec{b} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_k \vec{a}_k, \quad (5)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_k$ – скалярные величины. Такой вектор $\vec{b}$ называется *линейной комбинацией векторов*. А величины $c_1, c_2, \dots, c_k$ – *коэффициентами линейной комбинации*.

Примеры.

1. Так как $2 \cdot (1, 3, 2) + 3 \cdot (-1, 2, 4) = (-1, 12, 16)$, то вектор $(-1, 12, 16)$ есть линейная комбинация векторов $(1, 3, 2)$ и $(-1, 2, 4)$ с коэффициентами 2 и 3.
2. Любой вектор (x_1, x_2, x_3) является комбинацией векторов $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ с коэффициентами x_1, x_2, x_3 .

2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение 3. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ называется *линейно зависимой (ЛЗ)*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что имеет место равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}. \quad (6)$$

Определение 4. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ называется *линейно независимой (ЛНЗ)*, если равенство (6) имеет место только в том случае, когда все коэффициенты равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Очевидно, что любая система векторов отвечает только одному из этих определений.

Примеры.

- 1) Система векторов $\vec{a}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (0; 0; 1)$ является линейно независимой, так как

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

2) Векторы $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (2; 4; 6)$ линейно зависимы, так как равенство $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$ выполняется, например, при $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$.

3) Исследуем систему векторов

$$\vec{a}_1 = (5; 4; 3), \vec{a}_2 = (3; 3; 2), \vec{a}_3 = (8; 1; 3) \quad (7)$$

на линейную зависимость. Для этого выясним, при каких значениях коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ выполняется равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}. \quad (8)$$

Так как

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3, 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0, 0, 0),$$

то для определения коэффициентов линейной комбинации получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Так как система уравнений (9) является линейной однородной и определитель ее матрицы

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (проверьте!),}$$

то система (9) имеет ненулевые решения. А значит, существуют коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ линейной комбинации, одновременно не обращающиеся в ноль, при которых выполнено равенство (8). Следовательно, согласно определению 3, система векторов (7) является линейно зависимой.

Замечание. При определении значений коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, для которых имеет место равенство (6), приходим к системе n однородных уравнений с неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, столбцы матрицы ко-

торой состоят из координат соответствующих векторов. Система будет иметь ненулевое решение, если ранг r этой матрицы будет меньше количества неизвестных ($r < k$).

Опираясь на определения 3 и 4, можно доказать следующие **утверждения**.

1. *Любая система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.*

◀ Пусть $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Тогда при $\lambda_1 = 1, \lambda_i = 0, i > 1$ будем иметь $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s = 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$. ▶

2. *Система векторов, содержащая два одинаковых вектора, является линейно зависимой.*

◀ Пусть $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$. Тогда при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_i = 0, i > 2$, будем иметь $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_1 = \vec{0}$. ▶

3. *Система векторов, содержащая два вектора с пропорциональными координатами, является линейно зависимой.*

◀ Пусть $\vec{a}_2 = \gamma \vec{a}_1$. Тогда при $\lambda_1 = \gamma, \lambda_2 = -1, \lambda_i = 0, i > 2$, будем иметь $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s = \gamma \vec{a}_1 - \gamma \vec{a}_1 = \vec{0}$. ▶

4. *Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему векторов, является линейно зависимой.*

Доказательство. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ ($s < k$), содержащиеся в системе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, линейно зависимы, т.е. справедливо равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s = \vec{0},$$

где, например, $\lambda_1 \neq 0$. Очевидно, что справедливым будет и следующее равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s + 0 \cdot \vec{a}_{s+1} + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0},$$

из которого следует линейная зависимость всей системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. ◻

5. *Если система векторов является линейно независимой, то и любая ее подсистема также линейно независима.*

◀ Пусть система векторов является линейно независимой. Предположим, что векторы какой-то подсистемы линейно зависимы. Тогда, согласно доказанному утверждению 4, вектора и всей системы также линейно зависимы, что противоречит условию. Следовательно, любая подсистема линейно независима. ▶

- 6. (Признак линейной зависимости векторов).** Система векторов, содержащая более одного вектора, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов линейно выражается через остальные (или иначе, является линейной комбинацией остальных векторов).

Доказательство необходимости. Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависима, т.е. для нее справедливо равенство (6), в котором хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из равенства (6) получим

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \vec{a}_k.$$

А значит вектор $\vec{a}_1$ линейно выражается через остальные векторы системы.

Доказательство достаточности. Пусть хотя бы один из векторов системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно выражается через остальные, например:

$$\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

Это равенство можно переписать следующим образом:

$$-\vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0},$$

т.е. среди коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, существует хотя бы один коэффициент, отличный от нуля ($\lambda_1 = 1$). Тогда по определению векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. $\square$

- 7. (Признак линейной независимости векторов).** Система векторов, содержащая более одного вектора, является линейно независимой тогда и только тогда, когда ни один из ее векторов не может быть выражен через остальные.

Признак является следствием утверждения 6. Его справедливость легко установить от противного.

8. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ является линейно независимой, а система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}$ является линейно зависимой, то вектор $\vec{a}_{k+1}$ можно разложить по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ и при этом единственным образом.

Доказательство необходимости. Пусть система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно независима, а система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}$ является линейно зависимой. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$, среди которых есть отличные от нуля, когда выполнено равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} = \vec{0}. \quad (10)$$

Заметим, что коэффициент $\lambda_{k+1} \neq 0$. Так как в противном случае было бы выполнено равенство $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$, в котором не все коэффициенты равны нулю, что противоречило бы условию линейной независимости системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Так как $\lambda_{k+1} \neq 0$, то из (10) можно получить равенство

$$\vec{a}_{k+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} \vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \vec{a}_k.$$

Полученное равенство дает разложение вектора $\vec{a}_{k+1}$ по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Покажем единственность разложения. Предположим, что существует два различных разложения вектора $\vec{a}_{k+1}$:

$$\vec{a}_{k+1} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k,$$

$$\vec{a}_{k+1} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{a}_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) \vec{a}_k.$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ будем иметь

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_k - \beta_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \quad i = \overline{1, k}.$$

Полученные равенства доказывают единственность разложения. $\square$

Над системой векторов могут быть выполнены *элементарные преобразования*, которые не изменяют свойств линейной зависимости и независимости системы векторов:

1. Перестановка двух произвольных векторов местами.
2. Умножением вектора на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одному вектору системы другого вектора системы.

◀ Докажем, сохранение свойств линейной зависимости и независимости системы векторов при последнем из перечисленных преобразований.

Предположим, что система векторов

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \quad (C1)$$

является линейно независимой. Рассмотрим преобразованную систему

$$\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k. \quad (C2)$$

Выясним, при каких $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ будет справедливо равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}. \quad (P1)$$

Последнее равенство равносильно следующему

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}, \quad (P2)$$

которое в силу линейной независимости системы векторов выполнено, когда

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Отсюда следует линейная независимость системы (C2).

Если предположить, что система (C1) является линейно зависимой, то тогда среди коэффициентов в левой части равенства (P2) существует хотя бы один отличный от нуля. При этом, очевидно, что среди коэффициентов в левой части равенства (P1) также будут отличные от нуля.

Так как даже, если $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$, то $\lambda_1 \neq 0$. ▶

С помощью перечисленных преобразований систему векторов можно привести к ступенчатому виду. Система векторов имеет *ступенчатый вид*, если в координатной записи векторов каждый последующий вектор в начале имеет хотя бы на одну нулевую координату больше, чем предыдущий. Примером ступенчатой системы векторов является следующая система:

$$\vec{a}_1 = (5; 4; 3), \vec{a}_2 = (0; 3; 2), \vec{a}_3 = (0; 0; -1).$$

Любая ступенчатая система векторов, не содержащая нулевого вектора, является линейно независимой.

Опишем **схему исследования** системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, на линейную зависимость и независимость с помощью ее элементарных преобразований:

1. Векторы системы записывают в виде матрицы, в которой i -я строка состоит из координат вектора $\vec{a}_i$.
2. Используя элементарные преобразования над строками, составленную матрицу приводят к ступенчатому виду.
3. Если в результате преобразований будет получена нулевая строка (ей соответствует нулевой вектор), то данная система будет линейно зависимой, если нет – то линейно независимой.



Пример 1. Исследуем систему векторов

$$\vec{a} = (5; 4; 3), \vec{b} = (3; 3; 2), \vec{c} = (8; 1; 3)$$

на линейную зависимость и независимость.

Решение.

Эквивалентные преобразования матрицы, строки которой содержат координаты соответствующих векторов	Соответствующие системы векторов
$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-I-II]{-2II} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3I} \sim$	$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{a} - 2\vec{b} \\ \vec{b} \\ \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} \end{pmatrix} \rightarrow$
$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2II} \sim$	$\rightarrow \begin{pmatrix} \vec{a} - 2\vec{b} \\ 3\vec{a} - 5\vec{b} \\ \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} \end{pmatrix} \rightarrow$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\rightarrow \begin{pmatrix} \vec{a} - 2\vec{b} \\ 3\vec{a} - 5\vec{b} \\ \vec{c} - 7\vec{a} + 9\vec{b} \end{pmatrix}$
Система векторов линейно зависима	$\vec{c} - 7\vec{a} + 9\vec{b} = \vec{0}$
Существует вектор, который является линейной комбинацией других векторов	$\vec{c} = 7\vec{a} - 9\vec{b}$

На какие вопросы о системе векторов можно получить ответы, приведя соответствующую матрицу к ступенчатому виду:

1	Является ли система векторов линейно зависимой?	Да, если есть хотя бы одна нулевая строка, т.е. ранг матрицы меньше количества векторов.
2	Является ли система векторов линейно независимой?	Да, если нет нулевых строк, т.е. ранг матрицы равен количеству векторов.
3	Сколько линейно независимых векторов имеет система?	Количество линейно независимых векторов определяет ранг матрицы, т.е. количество ненулевых строк.

✓ **Линейно независимые вектора в системе векторов образуют ее базис. Остальные вектора системы разлагаются по базису.**

Так система векторов из примера 1 имеет два линейно независимых вектора. В качестве базисных векторов могут быть выбраны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{c}$ является их линейной комбинацией $\vec{c} = 7\vec{a} - 9\vec{b}$.



Пример 2. Исследуем систему векторов

$$\vec{a} = (1; 2; -1; -2; 0), \quad \vec{b} = (2; 3; 0; -2; 1), \quad \vec{c} = (1; 2; 1; 4; 2),$$

$$\vec{d} = (1; 3; -1; 2; 1)$$

на линейную зависимость и независимость.

Решение. Составим матрицу, строки которой являются заданными векторами и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-2I \\ -I \\ -I}]{-2I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+II} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заданная система является линейно зависимой. Нулевой строке соответствует следующая комбинация векторов:

$$\vec{d} - \vec{a} + (\vec{b} - 2\vec{a}) - (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{d} - 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}. \quad \blacksquare$$

3. О максимальном количестве линейно независимых векторов в n -мерном арифметическом пространстве

Рассмотрим n следующих векторов n -мерного пространства

$$\vec{i}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\vec{i}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0),$$

.....

$$\vec{i}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

Они являются линейно независимыми. Действительно,

$$\lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \dots + \lambda_n \vec{i}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

и равенство $\lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \dots + \lambda_n \vec{i}_n = \vec{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Этот пример показывает, что в n -мерном арифметическом пространстве существуют системы, состоящие из n линейно независимых векторов. Очевидно, существуют системы и с меньшим числом таких векто-



Пример 3. Определите базис в системе векторов

$$\vec{a} = (2; -1; -3), \vec{b} = (1; 0; 1), \vec{c} = (-1; 1; 3), \vec{d} = (1; 1; 4)$$

и разложите остальные вектора по базису.

Решение. Способ 1. Система содержит четыре вектора 3-мерного пространства. Следовательно, согласно теореме 1, она является линейно зависимой и существуют коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, не все равные нулю, что выполнено равенство

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} + \lambda_4 \vec{d} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Очевидно, система (13) имеет бесконечное множество решений (количество уравнений меньше количества неизвестных. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{---III}]{\substack{+2I \\ -3I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

выберем в качестве свободной неизвестной λ_4 , и пусть $\lambda_4 = 1$. Тогда для базисных неизвестных будем иметь:

$$\lambda_1 = -\lambda_4 = -1, \quad \lambda_2 = -\lambda_4 = -1, \quad \lambda_3 = -2\lambda_4 = -2.$$

Вектора, образующие **базис**, соответствуют **базисным неизвестным**. Вектора, соответствующие свободным неизвестным, разлагаются по базису.

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис заданной системы векторов. При этом вектор $\vec{d}$ разлагается по базису следующим образом. Так как

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} + \lambda_4 \vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d} = \vec{0},$$

то $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. ■

Для системы векторов из примера 3 рассмотрим еще один способ нахождения базиса в системе векторов:

1. Записать координаты векторов в виде строк матрицы и привести полученную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк. Слева от матрицы указываются соответствующие строкам вектора.
2. Ненулевые строки ступенчатого вида матрицы определяют базис системы векторов, а нулевые строки ступенчатого вида позволяют получить разложение остальных векторов системы по базисным векторам.

Решение. Способ 2. Запишем координаты векторов в виде строк матрицы и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{l}
 \vec{a} \\
 \vec{b} \\
 \vec{c} \\
 \vec{d}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc}
 2 & -1 & -3 \\
 1 & 0 & 1 \\
 -1 & 1 & 3 \\
 1 & 1 & 4
 \end{array} \right)
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \vec{b} \\
 \vec{a} \\
 \vec{c} \\
 \vec{d}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 1 \\
 2 & -1 & -3 \\
 -1 & 1 & 3 \\
 1 & 1 & 4
 \end{array} \right)
 \begin{array}{l}
 -2I \\
 +I \\
 -I
 \end{array}
 \rightarrow$$

$$\rightarrow
 \begin{array}{l}
 \vec{b} \\
 \vec{a} - 2\vec{b} \\
 \vec{c} + \vec{b} \\
 \vec{d} - \vec{b}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & -5 \\
 0 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & 3
 \end{array} \right)
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 +II \\
 +II
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \vec{b} \\
 \vec{a} - 2\vec{b} \\
 \vec{c} + \vec{a} - \vec{b} \\
 \vec{d} + \vec{a} - 3\vec{b}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & -5 \\
 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & -2
 \end{array} \right)
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 -2III
 \end{array}
 \rightarrow$$

$$\rightarrow
 \begin{array}{l}
 \vec{b} \\
 \vec{a} - 2\vec{b} \\
 \vec{c} + \vec{a} - \vec{b} \\
 \vec{d} - \vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & -5 \\
 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

Ненулевым строкам полученной матрицы соответствует подсистема линейно независимых векторов, для которой будем иметь:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{b} \\ \vec{a} - 2\vec{b} \\ \vec{c} + \vec{a} - \vec{b} \end{array} \right\} \xleftrightarrow[\text{система векторов}]{\text{Линейно независимая}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{array} \right.$$

Таким образом, вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис заданной системы векторов. Так как $\vec{d} - \vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$, то для вектора $\vec{d}$ имеем разложение по базису $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. ■

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с.
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТ-ЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.