Лекция № 7

Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица размерности n, E – единичная матрица той же размерности.

Определение 1. Матрица A называется *обратимой*, если существует такая матрица B, что $AB = BA = E$.

Можно доказать, что если такая матрица B существует, то она единственна. Действительно, допустим, что мы нашли две различные матрицы B и C такие, что

$$AB = BA = E \quad \text{и} \quad AC = CA = E.$$

Умножим равенство $BA = E$ справа на матрицу C и воспользуемся свойствами умножения матриц (ассоциативность, умножение на единичную матрицу):

$$(BA)C = EC \;\Leftrightarrow\; B(AC) = C \;\Leftrightarrow\; BE = C \;\Leftrightarrow\; B = C.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, матрица B из определения является единственной. Такая матрица называется *обратной* к матрице A и имеет специальное обозначение A^{-1}.

Определение 2. Матрица A^{-1} *обратная* к A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{1}$$

Допустим, что для данной матрицы A существует обратная. Тогда будем иметь:

$$AA^{-1} = E \;\Rightarrow\; \left|AA^{-1}\right| = |E| \;\Leftrightarrow\; |A|\left|A^{-1}\right| = 1. \tag{2}$$

Очевидно, равенство (2) возможно, если $|A| \neq 0$.

Таким образом, отличие определителя матрицы A от нуля является **необходимым условием** существования обратной к ней матрицы**.**

А из (2) при этом получим

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}.$$

Определитель обратной матрицы является обратной величиной к определителю исходной матрицы.

Определение 3. Матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной* матрицей. Матрица, определитель которой равен нулю, называется *вырожденной*.

Определение 4. *Союзной* матрицей к матрице $A=(a_{ij})$ называется матрица $A^*=\left(a_{ij}^*\right)$, элементы которой $a_{ij}^*=A_{ji}$, где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A $(i,\, j=\overline{1,n})$.. Иначе говоря, матрица A^* состоит из алгебраических дополнений матрицы A, записанных в транспонированном порядке.

Союзная матрица существует для любой квадратной матрицы.

Лемма. *Для квадратной матрицы A с определителем* $|A|=\Delta$ *справедливы следующие равенства*

$$AA^* = A^*A = \Delta\cdot E.$$

Доказательство. Умножая матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

получим матрицу $C=(c_{ij})$, элементы которой равны

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}.$$

Используя теоремы разложения и аннулирования[1], получим:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ \Delta, & i=j. \end{cases}$$

Таким образом,

[1] Лекция 3. (п. 3, п.6)
https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Linear_Algebra/Lections/Lection_3.pdf

$$AA^* = C = \begin{pmatrix} \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \Delta E.$$

Аналогично доказывается, что $A^* A = \Delta E.$ □

Теорема. *Для того чтобы квадратная матрица A размерности n была обратима, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель $\Delta \neq 0$. При этом*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*.} \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость доказана выше. Кроме того, была установлена единственность обратной матрицы.

Доказательство достаточности. Пусть для матрицы A определитель $\Delta \neq 0$. Для матрицы единственным образом может быть построена матрица $B = \frac{1}{\Delta} A^*$, где A^* - союзная к A матрица. Покажем, что B является обратной к A. Рассмотрим произведение матриц A и B:

$$AB = A \cdot \frac{1}{\Delta} A^* = \frac{1}{\Delta} AA^* \overset{\text{лемма}}{=} \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta E = E,$$

$$BA = \frac{1}{\Delta} A^* \cdot A = \frac{1}{\Delta} A^* A \overset{\text{лемма}}{=} \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta E = E.$$

Выполнены условия (1) определения обратной матрицы. Следовательно, в силу ее единственности, будем иметь $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*.$

□

Невырожденность матрицы является **необходимым** и **достаточным условием** существования обратной к ней.

Пример 1. Постройте матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как определитель матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, то обратная матрица существует и ее можно построить с помощью формулы (3). Найдя алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = 3,\ A_{12} = 1,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 1,$$

будем иметь

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot A^* = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицу A и A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что обратная матрица найдена верно. ■

Пример 2. Постройте матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

то обратная матрица существует и ее можно построить с помощью формулы (3). Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4,\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7,\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Обратную матрицу найдем по формуле (3):

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot A^* = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.}$$

Проверка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Свойства обратной матрицы

1. Пусть A и B квадратные невырожденные матрицы одного и того же порядка, тогда

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доказательство. Матрица AB обратима, так как $|AB|=|A||B|\neq 0$.

Используя свойства арифметических операций над матрицами, получим

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E,$$

Следовательно, в силу единственности обратной матрицы, будем иметь $(AB)^{-1} = =B^{-1}A^{-1}$.

2. Пусть A квадратная невырожденная матрица, тогда

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}.$$

Доказательство. Матрица A^{T} обратима, так как $|A^{T}| = |A| \neq 0$. Так как

$$A^{T}(A^{-1})^{T} = (A^{-1}A)^{T} = E^{T} = E \quad \text{и} \quad (A^{-1})^{T}A^{T} = (AA^{-1})^{T} = E^{T} = E,$$

то, в силу единственности обратной матрицы, будем иметь $(A^{T})^{-1} = =(A^{-1})^{T}$.

3. Пусть A квадратная невырожденная матрица, тогда $(A^{-1})^{-1}=A$.

Докажите справедливость свойства 3.

Формула (3) позволяет найти явные выражения для элементов обратной матрицы через элементы матрицы A. Однако построение союзной матрицы A^* трудоемко (особенно при больших n). Существует практически целесообразный метод построения обратной матрицы, который не связан с построением союзной матрицы.

Построение обратной матрицы методом Гаусса

Задача обращения матрицы $A = (a_{ij})$ тесно связана с задачей решения неоднородной системы линейных уравнений. Действительно, определение обратной матрицы к матрице A сводится к поиску квадратной матрицы X

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

для которой выполнено равенство $AX = E$. Это равенство, в свою очередь, равносильно системе n равенств:

$$AX^{<j>} = E^{<j>}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где

$$X^{<j>} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \quad E^{<j>} = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Каждое из равенств (4) представляет собой матричную запись системы линейных уравнений с матрицей A и n неизвестными, которые являются элементами столбца $X^{<j>}$.

Следовательно, элементы обратной матрицы $A^{-1} = X$ можно определить путем решения n систем линейных уравнений с одной и той же матрицей A. Системы различаются только столбцом свободных членов (правые части).

Для каждого j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

решается методом Гаусса. При этом левый блок соответствующей расширенной матрицы (независимо от того, какой правый блок) с помощью одних и тех же элементарных преобразований ее строк приводится к единичной матрице, тогда правый блок будет содержать элементы j-го столбца искомой обратной матрицы:

$$(A \mid E^{<j>}) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{элемент. преобр.}} (E \mid X^{<j>}).$$

Поэтому для нахождения обратной матрицы можно рассматривать преобразование блочной матрицы $(A \mid E)$, в которой правый блок содержит правые части всех систем (4).

Построение матрицы, обратной к заданной квадратной матрице A, при помощи *метода Гаусса* осуществляется следующим образом: составляется блочная матрица $(A|E)$ и выполняются элементарные преобразования строк, приводящие ее левый блок к единичной матрице; тогда в правом блоке образуется матрица A^{-1}:

$$(A\,|\,E)\ \xrightarrow[\text{строк}]{\text{элемент. преобр.}}\ (E\,|\,A^{-1}).$$

Пример 3. Постройте матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение. Присоединим к матрице A справа единичную матрицу E и выполним преобразование блочной матрицы $(A|E)$:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ +I\end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}-\frac{2}{5}II\\ \cdot\frac{1}{5}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1}).$$

В результате получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3/5 & -2/5\\ 1/5 & 1/5\end{pmatrix},$$

совпадающую с той, которая была получена в примере 1. ■

Пример 4. Постройте матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним преобразование блочной матрицы:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\3&0&2&0&1&0\\4&-2&5&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-3I\\-4I\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-6&5&-3&1&0\\0&-10&9&-4&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-III\\ \\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&4&-4&1&1&-1\\0&-10&9&-4&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\times\frac{1}{4}\\+\frac{5}{2}II\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&-1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right)\begin{array}{l}-III\\-III\\\times(-1)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&\frac{5}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{7}{4}&-\frac{9}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)\begin{array}{l}-2II\\ \\ \\\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&2&-1\\0&1&0&\frac{7}{4}&-\frac{9}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1}).$$

Таким образом,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\\frac{7}{4}&-\frac{9}{4}&\frac{5}{4}\\\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&-8&4\\-7&9&-5\\-6&10&-6\end{pmatrix}.$$

Матрица совпадает с той, которая была получены в примере 2. ■

Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы

1. Найти X из уравнения $AX = B$, где A – квадратная невырожденная матрица порядка n, B – прямоугольная матрица порядка $n\times m$.

Так как матрица A невырожденная, то существует обратная к ней матрица A^{-1}**.** Умножив обе части уравнения **слева** на матрицу A^{-1}, используя свойства умножения матриц, выполним следующие преобразования

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; EX = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}B.$$

Произведение матриц с указанными в условии размерами существует и при этом матрица X будет иметь размеры $n \times m$.

Таким образом,

$$\boxed{AX = B \overset{|A|\neq 0}{\Leftrightarrow} X = A^{-1}B.} \tag{5}$$

Замечание 1. Если $|A| \neq 0$, то построить решение уравнения $AX = B$ можно методом Гаусса без нахождения обратной матрицы, выполнив преобразование блочной матрицы:

$$(A \mid B) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{элемент. преобр.}} (E \mid A^{-1}B) = (E \mid X). \tag{6}$$

Замечание 2. Если $|A| = 0$ или матрица A не является квадратной и имеет размеры $n \times k$, то уравнение $AX = B$ будет иметь решение, если $r(A) = r(A \mid B)$.

2. Найти X из уравнения $XA = B$, где A – квадратная невырожденная матрица порядка n, B – прямоугольная матрица порядка $m \times n$.

Так как матрица A невырожденная, то существует обратная к ней матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения **справа** на матрицу A^{-1}, используя свойства умножения матриц, выполним следующие преобразования

$$(XA)\,A^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X\,(AA^{-1}) = BA^{-1} \Leftrightarrow EX = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

Произведение матриц с указанными в условии размерами существует и при этом матрица X будет иметь размеры $m \times n$.

Таким образом,

$$\boxed{XA = B \overset{|A|\neq 0}{\Leftrightarrow} X = BA^{-1}.} \tag{7}$$

Замечание 3. Если $|A| \neq 0$, то построить решение уравнения $AX = B$ можно методом Гаусса без нахождения обратной матрицы, выполнив преобразование блочной матрицы:

$$(A^T \mid B^T) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{элемент. преобр.}} (E \mid (A^T)^{-1}B^T) = (E \mid X^T). \tag{8}$$

Здесь $(A^T)^{-1}B^T = (A^{-1})^T B^T = (BA^{-1})^T = X^T$.

Замечание 4. Если $|A| = 0$ или матрица A не является квадратной и имеет размеры $n \times k$, то уравнение $XA = B$ будет иметь решение, если $r(A^T) = r(A^T \mid B^T)$.

3. Найти X из уравнения $AXC = B$, где A – квадратная невырожденная матрица порядка n, C – квадратная невырожденная матрица порядка m, B – прямоугольная матрица порядка $n \times m$.

Так как матрицы A и C невырожденные, то они имеют обратные A^{-1} и C^{-1} соответственно. Умножив обе части уравнения **слева** на матрицу A^{-1} и **справа** на матрицу C^{-1}, используя свойства умножения матриц, выполним следующие преобразования

$$A^{-1}(AXC)C^{-1} = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(C^{-1}C) = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EXE = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Произведение матриц с указанными в условии размерами существует и при этом матрица X будет иметь размеры $n \times m$.

Таким образом,

$$\boxed{AXC = B \overset{|A|\neq 0,\ |C|\neq 0}{\Leftrightarrow} X = A^{-1}BC^{-1}.} \qquad (9)$$

Замечание 5. Если $|A| \neq 0$ и $|C| \neq 0$, то построить решение уравнения $AXC = B$ можно методом Гаусса без нахождения обратных матриц по следующей схеме:

1 шаг: решение уравнения $AY = B$:

$$(A \mid B) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{элемент. преобр.}} (E \mid A^{-1}B) = (E \mid Y).$$

2 шаг: решение уравнения $XC = Y$

$$(C^T \mid Y^T) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{элемент. преобр.}} (E \mid (C^T)^{-1}Y^T) = (E \mid X^T).$$

Здесь $(C^T)^{-1}Y^T = (C^{-1})^T(A^{-1}B)^T = (A^{-1}BC^{-1})^T = X^T$.

Пример 5. Решите уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу, обратную матрице A (см. пример 1):

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение уравнения $AX = B$ найдем по формуле (5):

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -9 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для сравнения построим решение уравнения по схеме (6):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ +I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)\begin{matrix} -\frac{2}{5}II \\ \times\frac{1}{5} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right) = (E\,|\,X).$$

■

Пример 6. Решите уравнение $AXC = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицы, обратные матрицам A и C.

Покажите, что обратные матрицы имеют вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение уравнения $AXC = B$ найдем по формуле (9):

$$X = A^{-1}BC^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решением уравнения будет матрица:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для сравнения построим решение уравнение по схеме из замечания 5:

1 шаг: $$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -II \\ \times\frac{1}{2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E\,|\,Y).$$

2 шаг:

$$(C^T\,|\,Y^T) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 & 4 & \frac{1}{2} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -I-III \\ -I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) = (E\,|\,X^T).$$

Таким образом, $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$ ■

Пример 6. Решите уравнение $AX = B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица не является квадратной. По числу строк матрицы A и числу столбцов матрицы B установим, что неизвестная матрица X должна иметь размеры 3×3. Заметим, что блочной матрице $(A|B)$ соответствуют три системы линейных уравнений с одной и той же матрицей A, в каждой из которых три неизвестных, которые являются элементами соответствующих столбцов искомой матрицы X:

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

При этом правыми частями уравнений систем являются элементы соответствующих столбцов матрицы B, т.е.

$$A\cdot\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\cdot\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A\cdot\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Исследуем совместность уравнения $AX = B$, сравнив ранги матриц A и $(A|B)$. Для вычисления рангов приведем блочную матрицу $(A|B)$ к ступенчатому виду:

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ +I \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)\begin{matrix} +II \\ \\ \end{matrix} \sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(A\,|\,B)=2$ и $p=n-r(A)=3-2=1$, то в каждой из трех систем (8) одна свободная неизвестная. Очевидно, удобно взять неизвестные x_{21}, x_{22}, x_{23} в качестве свободных. Тогда базисные неизвестные определим следующим образом:

1) $x_{11} = 4 - 5x_{21}$, $x_{31} = 3 - 3x_{21}$;
2) $x_{12} = 1 - 5x_{22}$, $x_{32} = 2 - 3x_{22}$;
3) $x_{13} = 4 - 5x_{23}$, $x_{33} = 4 - 3x_{23}$.

Окончательно, решение заданного уравнения запишем, введя обозначения для свободных неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$X = \begin{pmatrix} 4-5C_1 & 1-5C_2 & 4-5C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ 3-3C_1 & 2-3C_2 & 4-3C_3 \end{pmatrix}, \ \forall C_1, C_2, C_3. \qquad \blacksquare$$

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.