

## Лекция № 6

### Системы линейных уравнений с произвольной матрицей

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений (СЛУ) с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (случай  $m = n$  не исключается). Запишем систему в компактной форме:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Здесь  $i$  – номер уравнения. Системе (1) соответствует матрица  $A$  и расширенная матрица  $(A|B)$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Так как каждый минор матрицы  $A$  является минором и расширенной матрицы (но не наоборот), то  $r(A) \leq r(A|B)$ .

**Теорема 1 (условие совместности).** *Для того чтобы система (1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы  $A$  равнялся рангу расширенной матрицы, т.е.  $r(A) = r(A|B)$ .*

**Доказательство необходимости.** Пусть система (1) совместна, а значит, имеет решение  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Докажем, что если  $r(A) = r$ , то и  $r(A|B) = r$ . Для этого надо показать, что любой минор  $(r+1)$ -го порядка расширенной матрицы, отличный от миноров  $(r+1)$ -го порядка матрицы  $A$ , равен нулю. Очевидно, что последний столбец такого минора содержит элементы столбца  $B$ .

Обозначим любой такой минор через  $D$ :

$$D = \left| \begin{array}{cccc|c} a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_1\beta_2} & \dots & a_{\alpha_1\beta_r} & b_{\alpha_1} \\ a_{\alpha_2\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} & \dots & a_{\alpha_2\beta_r} & b_{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_{r+1}\beta_1} & a_{\alpha_{r+1}\beta_2} & \dots & a_{\alpha_{r+1}\beta_r} & b_{\alpha_{r+1}} \end{array} \right|. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1}$  – различные числа из множества  $\{1, 2, \dots, m\}$ , а  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  – различные числа из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Так как  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – решение системы (1), то справедливы тождества

$$b_{\alpha_i} = \sum_{k=1}^n a_{\alpha_i k} x_k, \quad i = \overline{1, r+1}.$$

Подставляя их в (2), получим определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \beta_1} & a_{\alpha_1 \beta_2} & \dots & a_{\alpha_1 \beta_r} & \sum_{k=1}^n a_{\alpha_1, k} x_k \\ a_{\alpha_2 \beta_1} & a_{\alpha_2 \beta_2} & \dots & a_{\alpha_2 \beta_r} & \sum_{k=1}^n a_{\alpha_2, k} x_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_{r+1} \beta_1} & a_{\alpha_{r+1} \beta_2} & \dots & a_{\alpha_{r+1} \beta_r} & \sum_{k=1}^n a_{\alpha_{r+1}, k} x_k \end{vmatrix},$$

который, применив свойства 4 и 6 определителей<sup>1</sup>, можно представить в виде суммы

$$D = \sum_{k=1}^n x_k \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \beta_1} & a_{\alpha_1 \beta_2} & \dots & a_{\alpha_1 \beta_r} & a_{\alpha_1, k} \\ a_{\alpha_2 \beta_1} & a_{\alpha_2 \beta_2} & \dots & a_{\alpha_2 \beta_r} & a_{\alpha_2, k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_{r+1} \beta_1} & a_{\alpha_{r+1} \beta_2} & \dots & a_{\alpha_{r+1} \beta_r} & a_{\alpha_{r+1}, k} \end{vmatrix}.$$

В полученной сумме каждый определитель равен нулю либо как минор  $(r+1)$ -го порядка матрицы  $A$  (ранг матрицы  $A$  равен  $r$ )<sup>2</sup>, либо как определитель с двумя одинаковыми столбцами<sup>3</sup> (так как  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  и  $k$  – это числа из одного и того же множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ ). Следовательно,  $D = 0$ . Поэтому ранг расширенной матрицы и матрицы  $A$  системы совпадают.

<sup>1</sup> См. [Лекцию 3](#).

<sup>2</sup> Это будет при тех значениях  $k$ , которые не совпадают ни с одним из чисел  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ .

<sup>3</sup> Это будет в случае совпадения  $k$  с одним из чисел  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ .

*Доказательство достаточности.* Пусть  $r$  – ранг матрицы  $A$  и  $r(A) = r(A|B)$ . Докажем, что при этих условиях система (1) совместна, т.е. имеет решение.

Из определения ранга матрицы следует, что существует по крайней мере один минор  $r$ -го порядка матрицы  $A$ , отличный от нуля. Обозначим его через  $\Delta$ . Не нарушая общности, можно считать, что он расположен в левом верхнем углу матрицы  $A$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как чтобы обеспечить выполнение этого условия, мы можем просто перенумеровать уравнения и неизвестные.

Перепишем первые  $r$  уравнений системы (1) в виде:

$$\sum_{k=1}^r a_{ik} x_k = b_i - \sum_{k=r+1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3)$$

перенеся неизвестные  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  в правую часть<sup>4</sup>.

Придав неизвестным  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  любые фиксированные значения, решим систему (3) относительно  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . Так как определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то по теореме Крамера она имеет решение. Найдя это решение, получим совокупность значений

$$x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n, \quad (4)$$

удовлетворяющих уравнениям системы (3), а значит, и первым  $r$  уравнениям системы (1). Докажем, что они удовлетворяют и остальным<sup>5</sup>  $m - r$  уравнениям системы (1).

Введем следующие обозначения разностей правых и левых частей уравнений (1):

<sup>4</sup> Если  $r = n$ , то неизвестных в правых частях уравнений системы (3) не будет. При этом матрица системы (3) является квадратной с определителем  $\Delta \neq 0$ . В этом случае система (3) по теореме Крамера имеет единственное решение.

<sup>5</sup> Если  $r = m$ , то (4) будет решением системы (3), которая содержит все уравнения системы (1). В этом случае совместность системы (1) уже будет доказана.

$$H_i = b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Ясно, что для полученных значений неизвестных (4) (т.е. решений системы (3)) будут справедливы равенства

$$H_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (6)$$

Остается доказать, что  $H_i = 0$  и при  $i = r + 1, r + 2, \dots, m$ .

Рассмотрим определители порядка  $r + 1$  следующего вида:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & H_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & H_r \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & H_i \end{vmatrix} \quad (7)$$

при  $i = r + 1, r + 2, \dots, m$ . Подставив в них выражения (5) для  $H_i$ , и используя свойства определителей, получим

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & b_i \end{vmatrix} - \sum_{k=1}^n x_k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Здесь все определители в правой части равенства равны нулю, либо как определители, имеющие два одинаковых столбца, либо как миноры порядка  $r + 1$  расширенной матрицы (по условию ранг такой матрицы равен  $r$ ). Следовательно,

$$\Delta_i = 0, \quad i = r + 1, r + 2, \dots, m. \quad (8)$$

С другой стороны, учитывая (6), разложив определитель (7) по элементам последнего столбца, получим

$$\Delta_i = H_i \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = H_i \cdot \Delta, \quad i = r+1, r+2, \dots, m. \quad (9)$$

Из равенств (8) и (9) следует, что  $H_i \cdot \Delta = 0$ . Но так как  $\Delta \neq 0$ , то

$$H_i = 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, m.$$

Таким образом, доказали, что построенный набор значений неизвестных (4) удовлетворяет всем уравнениям системы (1), т.е. система (1) является совместной.

□

**Замечание.** Если  $r < m$ , то в системе (3) содержится только часть уравнений системы (1). Однако при  $r(A) = r(A|B)$  эти системы равносильны. Действительно, любое решение системы (1) является решением системы (3), а любое решение системы (3), как доказано, является решением системы (1).

Исследуем теперь определенность совместной системы. При  $r(A) = r(A|B)$  система (1) совместна и равносильна системе (3). Поэтому вместо системы (1) можно исследовать систему (3).

Пусть  $r = n$ , т.е. ранг матрицы  $A$  совпадает с количеством неизвестных в системе. Тогда правые части системы (3) не содержат неизвестных, а так как определитель  $\Delta$  системы не равен нулю, то по теореме Крамера она имеет единственное решение. В этом случае система (1) определенная.

Пусть  $r < n$ . Тогда правые части системы (3) содержат  $p = n - r$  неизвестных (их называют *свободными неизвестными*). Свободным неизвестным можно придавать любые значения, получая при этом соответствующие значения неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . В этом случае система (1) имеет бесконечное множество решений.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 2 (условие определенности).** Совместная система является определенной, если ранг  $r$  матрицы системы равен числу неизвестных  $n$ . Если же  $r < n$ , то система имеет бесконечное множество решений.

Теоремы 1 и 2 называют *теоремами Кронекера-Капелли*<sup>6</sup>.

Из теорем Кронекера-Капелли вытекает правило исследования и решения систем линейных уравнений с произвольной (в частности квадратной) матрицей.



**Пример 1.** Выяснить, является ли система совместной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

**Решение.** Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{+I \\ -2I \\ -3I}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-II \\ -III}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Анализируя ступенчатый вид матрицы, найдем  $r(A) = 2$ ,  $r(A|B) = 3$ .

Так как не выполнено условие совместности системы (ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы не равны), то система несовместна. ■



**Пример 2.** При каких значениях параметра  $a \in R$  система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 7x_2 + ax_3 = 7, \end{cases}$$

является совместной?

<sup>6</sup> **КАПЕЛЛИ** Альфредо (Capelli Alfredo) (5.08.1885–28.01.1910) – итальянский математик; **КРОНЕКЕР** Леопольд (Kronecker Leopold) (7.12.1823–29.12.1891) – немецкий математик. (Математика. Большой энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М., 2000. С. 697, 706).

**Решение.** Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & a & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-I]{-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & a-4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & a-11 & 2 \end{array}\right).$$

Для матрицы системы и расширенной матрицы системы будем иметь:

$$r(A) = \begin{cases} 2, & a = 11, \\ 3, & a \neq 11, \end{cases} \quad r(A|B) = 3, \quad \forall a.$$

Следовательно, система совместна, если  $a \neq 11$ . Так как при этом ранг системы ( $r = 3$ ) и количество неизвестных ( $n = 3$ ) равны, то система является определенной.

Таким образом, при  $a \neq 11$  система имеет единственное решение, а при  $a = 11$  система не имеет решений. ■



### Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (общая схема)

Для решения системы (1), в которой  $n$  – количество неизвестных, нужно выполнить следующие действия.

1. Составить расширенную матрицу  $(A|B)$  системы.
2. Используя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, привести ее к ступенчатому виду.
3. Выяснить, совместна ли система или нет. Для этого определить ранги матриц  $A$  и  $(A|B)$ . Ранги этих матриц равны количеству ненулевых строк в соответствующих им матрицах ступенчатого вида. Сравнивая ранги матриц, сделать вывод о совместности:

Если  $r(A) = r(A|B)$ , то система совместна.

Если  $r(A) \neq r(A|B)$ , то система не имеет решений.

4. Если система **совместна** и  $r(A) = r$ , установить, является ли она определенной или неопределенной:

Если  $r = n$ , то система имеет единственное решение (является определенной).

Если  $r < n$ , то система имеет бесконечное множество решений (является неопределенной). При этом  $r$  – количество базовых неизвестных, а  $p = n - r$  – количество свободных неизвестных.

5. Если система **определенна**, то для нахождения решения надо решить преобразованную систему, двигаясь от последнего уравнения к первому. На каждом шаге придется решать уравнение, содержащее только одну неизвестную, остальные неизвестные оказываются найденными на предыдущих шагах.

☑ Или продолжить преобразование расширенной матрицы, полученной на **шаге 2**. Исключив нулевые строки, с помощью элементарных преобразований привести матрицу к виду, когда левый блок является матрицей диагонального вида:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n & \beta_n \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 / \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \beta_2 / \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_n / \alpha_n \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, x_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \dots, x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}.$$

6. Если система неопределенна, то для нахождения всех решений, сначала надо выбрать базисные неизвестные. В качестве базисных выбираем те неизвестные, которым соответствует ненулевой минор порядка  $r$  матрицы ступенчатого вида (базисный минор). Для нахождения базисных неизвестных будем решать преобразованную систему, двигаясь от последнего уравнения к первому. В результате получим равенства, выражающие базисные неизвестные через свободные. Процесс решения совместной системы заканчивается получением формул, по которым могут быть найдены все неизвестные.

☑ Желательно преобразовать расширенную матрицу, полученную на **шаге 2**, к виду, когда базовый минор имеет диагональный вид.





**Пример 3.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

**Решение.** Составим расширенную матрицу системы, изменив нумерацию уравнений (последнее уравнение будем считать первым), и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[-4I]{-5I} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[-III]{-III} \\ & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[-5II]{-5II} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[-(-2)]{+II} \\ & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-III} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Так как  $r(A) = r(A|B) = 3$ , то система совместна. А так количество неизвестных  $n = 4$  и  $r(A) < n$ , то система имеет бесконечное множество решений. При этом количество свободных неизвестных  $p = n - r(A) = 1$ . В качестве базисных лучше всего выбрать первые три неизвестные  $x_1, x_2, x_3$ , так как им соответствует базисный минор диа-

гонального вида  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ . Тогда базисные неизвестные выражаются

через свободную неизвестную  $x_4$  следующим образом:

$$x_1 = x_4 + 2, \quad x_2 = -x_4 - 2, \quad x_3 = -3x_4 - 1.$$

**Ответ:**  $(x_4 + 2, -x_4 - 2, -3x_4 - 1, x_4)$ ,  $x_4$  – любое. ■



**Пример 4.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

**Решение.** Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[-I]{-2I} \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[+II]{+II} \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right) \quad (*)$$

Нулевые строки исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Так как  $r(A) = r(A|B) = 2$ , то система совместна. А так количество неизвестных  $n = 4$  и  $r(A) < n$ , то система имеет бесконечное множество решений. При этом количество свободных неизвестных  $p = n - r(A) = 2$ .

Рассмотрим два варианта выбора базисных неизвестных и построения общего решения системы.

**1 вариант.** В качестве базисных неизвестных могут быть выбраны неизвестные  $x_1, x_2$ . Им соответствует базисный минор  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ . Базисные неизвестные выразим через свободные  $x_3, x_4$  следующим образом:

$$-2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1 + 3x_3 - x_4}{2},$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \Rightarrow 2x_1 = -x_2 + x_3 + 3x_4 + 2 = \\ = -\frac{1+3x_3-x_4}{2} + x_3 + 3x_4 + 2 = \frac{3-x_3+7x_4}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3-x_3+7x_4}{4}.$$

В результате получим общее решение системы в следующем виде:

$$x_1 = \frac{3-x_3+7x_4}{4}, \quad x_2 = \frac{1+3x_3-x_4}{2}, \quad x_3, x_4 - \text{любые}.$$

**2 вариант.** Если для матрицы (\*) выполнить еще одно преобразование:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3II} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right),$$

то в качестве базисных неизвестных лучше выбрать неизвестные  $x_1, x_4$ , так как им соответствует диагональный минор  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ . В этом случае выражения для базисных неизвестных получим следующим образом:

$$2x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{5-7x_2+10x_3}{2},$$

$$-2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \Rightarrow x_4 = -2x_2 + 3x_3 + 1.$$

В результате получим общее решение системы:

$$x_1 = \frac{5-7x_2+10x_3}{2}, \quad x_4 = -2x_2 + 3x_3 + 1, \quad x_2, x_3 - \text{любые}.$$

**Замечание.** Общее решение системы можно записать и в других форматах. Например, решение для варианта 2:

$$1) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2}C_1 + 5C_2 + \frac{5}{2}, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = -2C_1 + 3C_2 + 1, \end{cases}$$

$C_1, C_2$  – произвольные постоянные.



**Доказательство достаточности.** Если  $r < n$ , то по второй теореме Кронекера-Капелли система (10) имеет бесконечное множество решений. А так как только одно решение (11) является нулевым, то все остальные решения ненулевые. □

**Следствие 1.** Если число неизвестных в однородной системе больше числа уравнений ( $n > m$ ), то однородная система имеет ненулевые решения.

**Следствие 2.** Для того чтобы однородная система с квадратной матрицей имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель  $\Delta$  равнялся нулю.

**Следствие 3.** Для того чтобы однородная система с квадратной матрицей имела единственное (нулевое) решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель  $\Delta$  не равнялся нулю.



**Пример 5.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Так как количество неизвестных  $n = 4$  меньше числа уравнений  $m = 3$ , то система имеет бесконечное множество решений. Для построения общего решения матрицу системы с помощью элементарных преобразований приведем к ступенчатому виду (не стоит рассматривать расширенную матрицу, так как нулевой столбец при элементарных преобразованиях строк остается нулевым):

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & 4 \\ 6 & -1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3I]{-I} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & 6 \\ 0 & -4 & -16 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2II]{\cdot(-\frac{1}{2})} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как  $r(A) = 2$ , то количество базисных неизвестных равно двум. В качестве базисных выберем неизвестные  $x_1, x_2$  и выразим их через свободные  $x_3, x_4$  следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{1}{2}x_4 &= 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_4, \\x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \Rightarrow x_2 = -4x_3 + 3x_4.\end{aligned}\tag{12}$$

Решение системы запишем в векторном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 = \forall const.$$

Любое решение системы является линейной комбинацией двух векторов:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые образуют *фундаментальную систему* решений заданной системы уравнений. ■

**Определение 1.** *Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы* называется такой набор линейно независимых<sup>7</sup> решений  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , что любое решение данной системы можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_p X_p, \tag{13}$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_p$  – числовые коэффициенты,  $p = r - n$  – количество свободных неизвестных.

**Определение 2.** *Общим решением системы* называется выражение  $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_p X_p$ , в котором  $c_1, c_2, \dots, c_p$  – произвольные постоянные, позволяющее с помощью надлежащего выбора значений чисел  $c_1, c_2, \dots, c_p$  получить любое решение системы.

---

<sup>7</sup> Понятие линейной независимости векторов будет рассмотрено в Лекции 8.

Опишем **способ построения ФСР** неопределенной системы (10) и ее общего решения:

1. Привести матрицу системы (10) к ступенчатому виду.
2. Если система неопределенная, определить количество  $p$  свободных неизвестных.
3. Выбрать базовые и свободные неизвестные.
4. Выразить базовые неизвестные через свободные.
5. Используя выражения для базовых неизвестных найти решения  $X_1, X_2, \dots, X_p$  системы уравнений для  $p$  различных наборов свободных неизвестных.

✓ При этом  $p$  наборам значений свободных неизвестных должен соответствовать определитель, отличный от нуля (именно это условие обеспечит линейную независимость решений).

**ФСР:** решения  $X_1, X_2, \dots, X_p$

6. Записать **общее решение** системы в виде линейной комбинации  $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_p X_p$ , где  $c_1, c_2, \dots, c_p$  – произвольные постоянные.



Описанным способом найдем ФСР для системы из примера 5.

Для построения ФСР будем использовать формулы (12):

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_4, \quad x_2 = -4x_3 + 3x_4.$$

Построение двух ( $p = 2$ ) линейно независимых решений  $X_1, X_2$  можно оформить в виде таблицы:

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $X_1$ | 0     | -4    | 1     | 0     |
| $X_2$ | -1/2  | 3     | 0     | 1     |

↑  
Значения базисных неизвестных определяются по соответствующим формулам (12)

Наборам значений свободных неизвестных соответствует определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$



**Пример 6.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_3 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3I \\ -2I \\ -III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\frac{19}{2}IV \\ +\frac{13}{2}IV \\ \times\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7IV \\ -\frac{3}{2}III \\ \times\frac{-1}{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{3}{2}III \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Так как  $r(A) = 3 < n = 5$ , то система неопределенна. Количество свободных неизвестных  $p = n - r(A) = 2$ . В качестве базисных неизвестных выберем  $x_2, x_3, x_4$ . Для базисных неизвестных получим следующие выражения:

$$x_2 = -2x_1 + \frac{3}{2}x_5, \quad x_3 = x_5, \quad x_4 = -\frac{7}{2}x_5.$$

С помощью полученных формул для базисных неизвестных построим ФСР:

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $X_1$ | 1     | -2    | 0     | 0     | 0     |
| $X_2$ | 0     | 3     | 2     | -7    | 2     |



Общее решение системы:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

■

### Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с.  
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТ-ЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.