

Лекция № 5

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

состоящую из m строк и n столбцов. Выделим в матрице A любые k строк и столько же столбцов. Элементы, стоящие на пересечении, образуют квадратную матрицу, определитель которой называется *минором k -го порядка матрицы A* .

Минором k -го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

Очевидно, порядок k минора должен удовлетворять условию:

$$1 \leq k \leq \min(m, n). \quad (2)$$

Полагая последовательно $k = 1, 2, \dots, \min(m, n)$, составляем при каждом k все миноры k -го порядка матрицы A . Так, например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

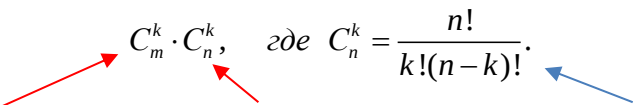
можно составить следующие миноры:

Девять миноров 1-го порядка	1; 2; 1; 2; 4; 2; 1; 1; 1	это все элементы матрицы)
Девять миноров 2-го по-	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$	выбраны 1 и 2 строки

рядка	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$	выбраны 1 и 3 строки
	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2;$	Выбраны 2 и 3 строки
Один минор 3-го порядка	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$	является определителем матрицы

Количество миноров k -го порядка, которые можно составить для матрицы A размера $m \times n$ равно

$$C_m^k \cdot C_n^k, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



Сколькими способами можно выбрать k строк из m строк матрицы A

Сколькими способами можно выбрать k столбцов из n столбцов матрицы A

Число сочетаний из n элементов по k

Максимальный порядок миноров матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы*. (Или другими словами, порядок самого старшего минора, отличного от нуля).

Следовательно, если ранг матрицы A равен r , то среди всех ее миноров существует хотя бы один минор r -го порядка, отличный от нуля, а все миноры $r+1$ и более высокого порядка либо равны нулю, либо не могут быть составлены (если $r+1 > \min(m, n)$).

Для ранга матрицы A используются следующие обозначения¹:

$$\text{rank}(A), \text{rang}(A), r(A).$$

В рассмотренном примере для матрицы (3) ее ранг равен 2, так как среди миноров 2-го порядка существует отличные от нуля, а минор 3-го

¹ Обозначение rank характерно для английского языка.

порядка равен нулю. Миноры 4-го и более высокого для матрицы (3) не могут быть составлены.

Вычисление ранга матрицы путем перебора всех ее миноров весьма трудоемко. Но надо заметить, что если при последовательном построении миноров окажется, что все миноры s -го порядка равны нулю, то вычислять миноры $(s+1)$ -го порядка и выше (если их можно составить) не требуется, так как они заведомо будут равны нулю. Это следует из того факта, что определитель порядка n с использованием теоремы разложения можно выразить через определители порядка $n-1$.

Опираясь на определение, вычисление ранга матрицы можно описать следующей схемой, где M_k – минор k -го порядка матрицы A :

	$A = 0$ (нулевая матрица)	$r(A) = 0$
	$A \neq 0, \quad m \times n$ $0 < r(A) \leq \min(m, n)$	
1 шаг	$\exists M_1 \neq 0$	$r(A) \geq 1$
2 шаг	$\exists M_2 \neq 0$	$r(A) \geq 2$
...		
r шаг	$\exists M_r \neq 0$	$r(A) \geq r$
$(r + 1)$ шаг	$(\forall M_{r+1} = 0) \vee (M_{r+1} \text{ не существуют})$	$r(A) = r$

Замечание. При нахождении ранга матрицы достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k -го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор M_{k-1} .

Любой из отличных от нуля миноров матрицы A , порядок которого равен $r(A)$, называется *базисным минором*.

Пример 1. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$M_1 = 1 \neq 0$	
$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$	
$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{1} \\ -1 & 1 & \boxed{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$	
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$M_3 = A = 0$ (первый и второй столбцы пропорциональны)	$r(A) = 2$

Существует способ вычисления ранга матрицы без вычисления ее миноров, который основан на упрощении структуры матрицы с помощью элементарных преобразований. К *элементарным преобразованиям* матрицы относятся следующие:

- 1) обмен местами двух строк или двух столбцов матрицы;
- 2) умножение всех элементов строки или столбца на произвольное число λ , не равное 0;
- 3) прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на одно и то же число.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Это утверждение легко доказать, используя свойства определителей.

Для вычисления ранга матрицы ее с помощью элементарных преобразований приводят к матрице *ступенчатого вида*, для которого характерно следующее:

- 1) все ненулевые строки (такая строка содержит хотя бы один ненулевой элемент) расположены выше нулевых строк;
- 2) в каждой ненулевой строке, начиная со второй, количество нулевых элементов в начале строки хотя бы на единицу больше, чем в предыдущей.

Так, например, матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ступенчатый вид.

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Следовательно,

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в соответствующей ей матрице ступенчатого вида.

Пример 2. Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду, выполнив следующие преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3I \\ -11I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \\ 0 & 12 & -3 & -33 & 60 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3II \\ -II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix}$$

Матрица ступенчатого вида имеет две ненулевые строки. Следовательно, $r(A) = 2$.

Замечание 1. Можно при выполнении преобразований матрицы сразу же вычеркивать нулевые строки, исключая их из последующих действий (или исключать все пропорциональные строки, кроме одной из них).

Замечание 2. При вычислении ранга иногда удобнее рассматривать транспонированную к исходной матрицу, учитывая, что при транспонировании ранг матрицы не изменяется.

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с.
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТ-ЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.