

Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

[illegible]

Вместо записи системы в виде (1) можно использовать следующую запись:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2')$$

Если из коэффициентов уравнений, свободных членов и неизвестных составить следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то систему (1) можно записать в матричном виде:

$$AX = B. \quad (3)$$

Матрица A называется *матрицей системы*, столбец B – *столбцом правых частей (столбцом свободных членов)*.

Если к матрице системы A добавить столбец B , то получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

называемую *расширенной матрицей системы*. Будем использовать для расширенной матрицы следующее обозначение $(A|B)$.

Решением системы называется совокупность значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, при подстановке которых в уравнения системы (1) все они обращаются в тождества.

Если в каждом уравнении системы правые части $b_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$), то систему называют *однородной*. Если хотя бы одна из правых частей системы уравнений отлична от нуля, систему называют *неоднородной*.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если решения системы не существует.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если существует более одного решения.

Две системы с одним и тем же набором неизвестных называются *равносильными*, если их множества решений совпадают, т.е.:

- 1) если каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот;
- 2) или, если обе системы несовместны.

Равносильные системы должны иметь одинаковые наборы неизвестных, но число уравнений в них может и не совпадать.

Для решения системы ее обычно преобразуют в более простую. При этом можно применять лишь такие преобразования, которые переводят систему в равносильную. К ним, в частности, относятся:

- 1) обмен местами двух уравнений в системе;
- 2) умножение уравнения на любое число, не равное нулю;
- 3) прибавление к одному уравнению другого, умноженного предварительно на произвольное число.

Перечисленные преобразования называют *элементарными*.

Доказательство. Предположим сначала, что система (4) имеет решение (т.е. является совместной). Докажем, что оно единственно и выражается формулами (5).

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – любое решение системы. Подставив данный набор значений неизвестных в левые части уравнений (4), получим тождества. Умножим эти тождества соответственно на алгебраические дополнения $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}$ элементов k -го столбца определителя Δ и полученные равенства сложим почленно. После приведения подобных членов получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & (a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \dots + a_{n1}A_{nk})x_1 + \dots \\ & + (a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk})x_k + \dots \\ & + (a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} + \dots + a_{nn}A_{nk})x_n = \\ & = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}. \end{aligned} \quad (6)$$

В равенстве (6) согласно теореме аннулирования² коэффициенты при $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ равны нулю. А коэффициент при x_k по теореме разложения² равен определителю Δ . Следовательно, равенство (6) принимает вид

$$\Delta x_k = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}. \quad (7)$$

Правая часть равенства (7) по теореме замещения² равна определителю Δ_k , получаемому из определителя Δ заменой элементов k -го столбца столбцом свободных членов. Тогда равенство (7) можно записать в виде $\Delta x_k = \Delta_k$, откуда, учитывая условие $\Delta \neq 0$, получим равенства (5).

Таким образом, доказали, что в случае совместности системы (4), определитель которой не равен нулю, любое ее решение выражается формулами (5). Из того, что по этим формулам, очевидно, можно получить только одну совокупность значений неизвестных, следует единственность решения системы (4).

Формулы (5) для построения решения системы (4) называют *формулами Крамера*³.

² См. [Лекцию 3](#).

³ **КРАМЕР** Габриель (Cramer Gabriel) (31.07.1704, Женева, – 4.01.1752, Баньоль, близ Нима, Франция), – швейцарский математик. Установив и опубликовав в

Остается доказать, что система (4) при $\Delta \neq 0$ действительно совместна. Для этого покажем, что совокупность значений неизвестных, получаемая по формулам Крамера (5), удовлетворяет всем уравнениям системы (4).

Перепишем систему (4) и формулы (5) соответственно в виде:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$x_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n b_j A_{jk}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Подставив выражения (9) в левую часть уравнения (8), получим:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n b_j A_{jk} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n b_j A_{jk}.$$

Изменив порядок суммирования, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n b_j \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В силу теорем разложения и аннулирования⁴ $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \Delta$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n b_j \delta_{ij} \Delta = \sum_{j=1}^n b_j \delta_{ij} = b_i \delta_{ii} = b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, при замене в уравнениях (8) неизвестных x_k по формулам (9) все уравнения системы обращаются в тождества.

Итак, если определитель системы (4) не равен нулю, то система будет совместной и определенной. При этом ее решение будет выражаться формулами Крамера (5).

□

1750 г. правило решения систем линейных уравнений с буквенными коэффициентами (правило Крамера), Крамер заложил основы теории определителей. (Математика. Большой энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М., 2000. С. 705.)

⁴ См. п.6 [Лекции 3](#). Здесь δ_{ij} - символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{+I, -2I} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Так как определитель отличен от нуля, система имеет единственное решение, которое определим по формулам Крамера, вычислив предварительно три определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2I} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2I} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2I} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда, используя формулы (5), найдем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{6}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{6}.$$

Замечание. Если определитель системы (4) равен нулю, то формулы Крамера неприменимы.

Формулы Крамера важны в теоретическом отношении, так как позволяют найти явные выражения неизвестных через коэффициенты и свободные члены системы уравнений. Однако для решения систем с чис-

ловыми коэффициентами применять формулы Крамера не всегда целесообразно, особенно при больших n , так как имеются менее трудоемкие способы решения.

3. СЛАУ с невырожденной матрицей. Метод Гаусса

Для решения систем с числовыми коэффициентами удобно использовать *метод Гаусса*, называемый *методом последовательного исключения неизвестных*.

Процесс решения системы (4) по методу Гаусса состоит из двух этапов. На **первом этапе (прямой ход)** система (4) с помощью цепочки элементарных преобразований приводится к треугольному виду (к системе с треугольной матрицей):

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1,n-1}x_{n-1} + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2,n-1}x_{n-1} + b_{2n}x_n = c_2, \\ \\ b_{n-1,n-1}x_{n-1} + b_{n-1,n}x_n = c_{n-1}, \\ b_{nn}x_n = c_n. \end{array} \right. \quad (10)$$

На **втором этапе (обратный ход)** система (10) решается, начиная с последнего уравнения:

$$x_n = \frac{c_n}{b_{pn}}, \quad x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - b_{n-1,n}x_n}{b_{n-1,n-1}}, \quad \dots, \quad x_1 = \frac{c_1 - b_{12}x_2 - \dots - b_{1n}x_n}{b_{11}}.$$

Заметим, что переход от системы (4) к системе (10) всегда возможен, если определитель системы (1) не равен нулю⁵. При этом система имеет единственное решение.

Очевидно, что элементарным преобразованиям системы соответствуют определенные преобразования строк ее расширенной матрицы, и наоборот. Действительно, изменение порядка уравнений в системе соответствует изменению порядка строк в расширенной матрице. Умножению уравнения на число соответствует умножение на число строки расширенной матрицы. Прибавлению к одному уравнению с-

⁵ Решение систем с определителем равным нулю будет рассмотрено в теме «Системы линейных уравнений с произвольной матрицей».

системы другого уравнения, умноженного на любое число, соответствует прибавление к одной строке расширенной матрицы другой строки, умноженной на это число. Поэтому для упрощения записи целесообразнее преобразовывать не саму систему, а строки ее расширенной матрицы.

Элементарным преобразованиям системы уравнений соответствуют элементарные преобразования матрицы.

Решим систему из [примера 1](#) методом Гаусса, выполняя элементарные преобразования над строками ее расширенной матрицы.

Прямой ход метода:

$\left(\begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2I \\ -I \end{array} \sim$	↕ Сначала меняем местами 1-ю и 2-ю строки
$\sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times 5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 15 & -9 & 9 \\ 0 & -15 & 15 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(1/3) \\ +II \end{array} \sim$	Получили равные по абсолютной величине элементы
$\sim \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array}\right)$	Левый блок матрицы имеет треугольный вид

Обратный ход метода Гаусса можно реализовать следующим образом:

1 способ. Переход к уравнениям, рассматривая их в обратном порядке:

$x_3 = -\frac{1}{6},$	$x_1 = \frac{5}{6},$
$5x_2 - 3x_3 = 3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3 + 3x_3}{5} = \frac{1}{2},$	$x_2 = \frac{1}{2},$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{6}.$	$x_3 = -\frac{1}{6}$

2 способ. Преобразование расширенной матрицы к виду, когда на месте ее левого блока получится диагональная матрица:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +\frac{1}{6} III \\ +\frac{1}{2} III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 11/6 \\ 0 & 5 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -(2/5) II \\ \times(1/5) \\ \times(1/6) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Правый блок расширенной} \\ \text{матрицы содержит искомые} \\ \text{значения неизвестных} \end{array}$$

$$x_1 = \frac{5}{6},$$

$$x_2 = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = -\frac{1}{6}$$

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с.
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТ-ЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.