

Лекция № 3

Определители n -го порядка

1. Элементарные сведения о перестановках

Рассмотрим n целых чисел $1, 2, \dots, n$. Их можно располагать в различном порядке. Всевозможные расположения этих чисел называют *перестановками*. Перестановка $(1\ 2\ \dots\ n)$, в которой числа идут в порядке возрастания, называется *натуральной*.

Пример 1. При $n = 3$ возможны перестановки

$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2), (3\ 2\ 1)$.

Их число равно $3! = 6$.



Методом математической индукции докажите, что из n элементов можно составить $n!$ перестановок.

Назовем *беспорядком* (или *инверсией*) в перестановке тот факт, что большее число стоит перед меньшим. Например, в перестановке $(3\ 1\ 2\ 4)$ имеется два беспорядка: число 3 стоит перед числами 1 и 2.



Определите число беспорядков в перестановках из трех элементов: $(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2), (3\ 2\ 1)$.

Число беспорядков в перестановках может быть четным либо нечетным. Перестановки с четным числом беспорядков называются *четными*, перестановки с нечетным числом беспорядков называются *нечетными*. Например, перестановка $(3\ 1\ 2\ 4)$ является четной.



Какие из перестановок трех элементов $(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2), (3\ 2\ 1)$ являются четными, а какие нечетными?

Обмен местами двух элементов в перестановке называется *транспозицией*. Транспозиция переводит одну перестановку в другую. Например, перестановка $(1\ 2\ 3\ 4)$ в результате транспозиции $2 \leftrightarrow 4$ перейдет в перестановку $(1\ 4\ 3\ 2)$. Совершив несколько транспозиций, можно из одной перестановки получить любую другую.

Пример 2. Перестановка $(1\ 3\ 4\ 2)$ переводится в перестановку $(2\ 4\ 1\ 3)$ с помощью следующих транспозиций:

$$(1\ 3\ 4\ 2) \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} (2\ 3\ 4\ 1) \xrightarrow{3 \leftrightarrow 4} (2\ 4\ 3\ 1) \xrightarrow{3 \leftrightarrow 1} (2\ 4\ 1\ 3).$$

Этот перевод, конечно, можно выполнить не единственным образом.

Докажем, что *одна транспозиция меняет четность перестановки*, т.е. четная перестановка становится нечетной, а нечетная четной.

Рассмотрим сначала частный случай, когда совершается транспозиция двух соседних элементов. Исследуем перестановку

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n). \quad (1)$$

Здесь через α_k обозначен элемент, т.е. некоторое число из совокупности $1, 2, \dots, n$. Индекс в обозначении α_k указывает на место элемента в перестановке (1). Транспозиция элементов, стоящих на k -м и $k+1$ -м местах, приводит к перестановке

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1} \alpha_k \dots \alpha_n). \quad (2)$$

Если числа α_k, α_{k+1} стоят в беспорядке, т.е. $\alpha_k > \alpha_{k+1}$, то в последовательности чисел α_{k+1}, α_k беспорядка нет. И наоборот, если в последовательности чисел α_k, α_{k+1} нет беспорядка, то числа α_{k+1}, α_k стоят в беспорядке. Относительно остальных элементов перестановки число беспорядков при указанной транспозиции не изменится. Следовательно, число беспорядков в перестановке (2) на единицу отличается от числа беспорядков в перестановке (1). Поэтому перестановки имеют разную четность.

Рассмотрим общий случай - транспозицию любых элементов перестановки. Пусть между элементами α_k и α_l в перестановке

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_l \dots \alpha_n) \quad (3)$$

имеется s других чисел. Транспозиция элементов α_k и α_l приведет к перестановке

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l \dots \alpha_k \dots \alpha_n), \quad (4)$$

причем между элементами α_l и α_k стоят те же s чисел, что и между элементами α_k и α_l в перестановке (3), и в том же порядке. Покажем, что перестановки (3) и (4) имеют разную четность.

Переведем перестановку (3) в перестановку (4) посредством нескольких транспозиций рядом стоящих элементов. Выполнив s транспозиций, переместим элемент α_k вправо и поставим перед элементом α_l . Затем, выполнив $s + 1$ транспозиций соседних элементов, переместим элемент α_l влево на место α_k . Всего будет выполнено $2s + 1$ транспозиций рядом стоящих элементов. Каждая из них согласно доказанному меняет четность перестановки. Так как $2s + 1$ нечетное число, то перестановки (3) и (4) обладают разной четностью.

2. Определители любого порядка и их свойства

Рассмотрим определитель 3-го порядка и исследуем его структуру. Выпишем выражение для определителя, причем в каждом слагаемом сомножителя a_{ij} расставим в такой последовательности, чтобы их первые индексы образовали натуральную перестановку (1 2 3):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Из приведенной формулы видно, что определитель третьего порядка представляет собой алгебраическую сумму $3!$ Членов, каждый из которых является произведением трех элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Причем со знаком «+» берутся те члены определителя, вторые индексы элементов которых образуют четные перестановки (1 2 3), (2 3 1), (3 1 2), а со знаком «-» те его члены, вторые индексы элементов которых образуют нечетные перестановки (3 2 1), (2 1 3), (1 3 2).

Обобщив это закон образования определителя третьего порядка, дадим определение определителя любого порядка n .

Рассмотрим квадратную матрицу, содержащую n строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице (5), называется алгебраическая сумма $n!$ членов, каждый из которых представляет собой произведение n элементов a_{ij} , взятых по одному из каждой строки и каждого столбца; при этом член определителя берется со знаком «+», если вторые индексы его элементов образуют четную перестановку, и со знаком «-», если эта перестановка нечетная (тогда как первые индексы образуют натуральную перестановку).

Определитель n -го порядка обозначается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Далее будем использовать и более компактное обозначение $\Delta = |a_{ij}|$.

Без указания элементов матрицы A ее определитель можно обозначить как $|A|$.

Для примера найдем, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка некоторые произведения его элементов:

Произведения $a_{12}a_{23}a_{34}$ и $a_{12}a_{23}a_{34}a_{44}a_{31}$	не являются членами определителя четвертого порядка, так как число сомножителей в них не равно четырем
--	--

Произведение $a_{12}a_{24}a_{31}a_{41}$	не является членом определителя четвертого порядка, так как не содержит элемента из третьего столбца. В него входят два сомножителя (a_{31} и a_{41}) из первого столбца
Произведения $a_{12}a_{44}a_{33}a_{21}$ и $a_{12}a_{34}a_{43}a_{21}$	Входят в определитель четвертого порядка, так как они содержат сомножители, взятые по одному из каждой строки и каждого столбца. Расставив сомножители так, чтобы первые индексы образовали натуральную перестановку: $a_{12}a_{44}a_{33}a_{21} = a_{12}a_{21}a_{33}a_{44},$ $a_{12}a_{34}a_{43}a_{21} = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43},$ Определим четность перестановок из вторых индексов. Так как перестановка (2 1 3 4) нечетная (содержит один беспорядок), то член $a_{12}a_{44}a_{33}a_{21}$ входит в определитель со знаком «-». Перестановка (2 1 4 3) четная (два беспорядка). Поэтому член $a_{12}a_{34}a_{43}a_{21}$ входит в определитель со знаком «+».

Введем величину

$$p(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) - \text{нечетная перестановка,} \\ 2, & \text{если } (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) - \text{четная перестановка.} \end{cases} \quad (7)$$

Тогда по данному выше определению

$$\Delta = \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}. \quad (8)$$

Здесь суммирование распространяется на все перестановки $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ из n чисел 1, 2, ..., n , что условно обозначено символом $n!$ под знаком суммы $\sum$. Если перестановка $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ четная, то $(-1)^{p(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)} = 1$, если перестановка $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ нечетная, то $(-1)^{p(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)} = -1$.

С увеличением порядка определителя число его членов быстро растет. Определитель четвертого порядка содержит всего $4! = 24$ члена, а определитель седьмого порядка уже $7! = 5040$. Поэтому вычисление определителя высокого порядка по его определению довольно трудо-

емко. В то же время существуют менее трудоемкие способы вычисления, основанные на применении свойств определителей.

Определители n -го порядка обладают теми же свойствами, что и определители 2-го и 3-го порядка¹.

1°. *Величина определителя не меняется при его транспонировании.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим определитель Δ матрицы $A = (a_{ij})$, определяемый по формуле (8), и определитель D матрицы $B = (b_{ji})$, определяемый по формуле

$$D = \sum_{n!} (-1)^{p(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)} b_{1\beta_1} b_{2\beta_2} \dots b_{n\beta_n}. \quad (9)$$

Пусть матрица B является транспонированной к A . Тогда их элементы связаны соотношениями

$$b_{ji} = a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Учитывая соотношения (10) для определителя D , будем иметь

$$D = \sum_{n!} (-1)^{p(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n}. \quad (11)$$

В каждом слагаемом формулы (11) переставим сомножители a_{β_i} местами таким образом, чтобы их первые индексы составили натуральную перестановку. Тогда вторые индексы, стоящие в порядке возрастания, будут после перестановки сомножителей образовывать некоторую перестановку $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ и при этом:

$$a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n} = a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}.$$

Перестановки $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ и $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ разные, но обладают одинаковой четностью так как с помощью одного и того же числа транспозиций перестановка $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ переводится в натуральную, а перестановку $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ получаем из натуральной. Поэтому

$$p(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) = p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n),$$

и равенство (11) принимает вид

¹ [Лекция 1](#) «Определители 2-го и 3-го порядка»

$$D = \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}.$$

Полученная для определителя D формула совпадает с (8). И, следовательно, $D = \Delta$.

□

✓ Из этого свойства вытекает, что строки и столбцы определителя равноправны. Поэтому любое свойство, доказанное для строк, справедливо и для столбцов.

2°. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то у него изменится только знак, а абсолютная величина останется прежней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим определители $\Delta = |a_{ij}|$ и $D = |b_{ij}|$. Пусть их элементы связаны соотношениям

$$b_{kj} = a_{mj}, \quad b_{mj} = a_{kj}, \quad b_{ij} = a_{ij} \quad (i \neq k, m). \quad (12)$$

Тогда определитель D совпадает с определителем, получаемым из Δ перестановкой k -й и m -й строк. При этом для определенности будем считать, что $k < m$.

Используя определение и соотношения (12) для определителя D будем иметь:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_m \dots \alpha_n)} b_{1\alpha_1} b_{2\alpha_2} \dots b_{k\alpha_k} \dots b_{m\alpha_m} \dots b_{n\alpha_n} = \\ &= \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_m \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{m\alpha_k} \dots a_{k\alpha_m} \dots a_{n\alpha_n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выполним в перестановке $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_m \dots \alpha_n)$ одну транспозицию элементов α_k и α_m , в результате чего четность перестановки изменится на противоположную, тогда

$$(-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_m \dots \alpha_n)} = -(-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \dots \alpha_k \dots \alpha_n)}.$$

Затем, поменяв местами сомножители $a_{m\alpha_k}$ и $a_{k\alpha_m}$ в произведении $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{m\alpha_k} \dots a_{k\alpha_m} \dots a_{n\alpha_n}$, для выражения (13) получим:

$$D = - \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \dots \alpha_k \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{k\alpha_m} \dots a_{m\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n}. \quad (14)$$

В формуле (14) первые индексы образуют уже натуральную перестановку (так как $k < m$), а перестановка вторых индексов такая же, как и в выражении $(-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \dots \alpha_k \dots \alpha_n)}$. Поэтому сумма в правой части формулы (14) равна определителю Δ . Следовательно, $D = -\Delta$.

□

3°. *Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.*

Доказательство. Так как по условию две строки одинаковы, то их перестановка не меняет величины Δ определителя. С другой стороны, согласно [свойству 2°](#) в результате перестановки знак определителя изменяется. Следовательно, будем иметь $\Delta = -\Delta$. Откуда получим $\Delta = 0$.

□

4°. *Если все элементы строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.*

Доказательство. Рассмотрим определители матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, элементы которых связаны соотношениями:

$$b_{kj} = \lambda a_{kj}, \quad b_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq k. \quad (15)$$

Тогда определитель $|B|$ совпадает с определителем, получаемым из $|A|$ умножением элементов его k -ой строки на λ .

По определению для определителя $|B|$ имеем:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} b_{1\alpha_1} \dots b_{k\alpha_k} \dots b_{n\alpha_n} \stackrel{(15)}{=} \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots (\lambda a_{k\alpha_k}) \dots a_{n\alpha_n} = \\ &= \lambda \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots a_{k\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n} = \lambda |A|. \end{aligned}$$

□

Из свойств 3° и 4° следует следующее свойство:

5°. *Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.*

6°. *Если все элементы строки (столбца) являются суммами из одинакового количества слагаемых, то определитель равен сумме определителей, в которых элементами этой строки (столбца) служат отдельные слагаемые.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть все элементы a_{kj} ($j = \overline{1, n}$) k -й строки определителя $\Delta = |a_{ij}|$ являются суммами двух слагаемых:

$$a_{kj} = b_j + c_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Тогда определитель имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow k\text{-я строка}$$

Используя [определение](#) и соотношения (16), для определителя Δ будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{k\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n} = \\ &= \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots (b_{\alpha_k} + c_{\alpha_k}) \dots a_{n\alpha_n} = \\ &= \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots b_{\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n} + \\ &\quad + \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots c_{\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow k\text{-я строка} \end{aligned}$$

Для произвольного количества слагаемых в строке доказательство можно провести с использованием метода математической индукции.

□

7°. Величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умножив их предварительно на один и тот же множитель.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим определитель $\Delta = |a_{ij}|$ и определитель $D = |b_{ij}|$, получаемый из Δ добавлением к элементам k -й строки соответствующих элементов m -й строки, умноженных на число λ , т.е.

$$b_{kj} = a_{kj} + \lambda a_{mj}, \quad b_{ij} = a_{ij} \quad (i = \overline{1, n}, i \neq k), \quad j = \overline{1, n}.$$

В силу [свойства 6°](#) будем иметь $D = \Delta + \Delta_0$, где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow k\text{-я строка} \\ \\ \leftarrow m\text{-я строка} \end{matrix}$$

□

Очевидно, что $\Delta_0 = 0$ как определитель с двумя пропорциональными строками. Следовательно, $D = \Delta$.

3. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам произвольного ряда.

Если в определителе n -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

вычеркнуть i -ю строку и j -й столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ij} , то оставшиеся элементы составят определитель порядка $(n-1)$, который называют *минором определителя Δ , соответствующим элементу a_{ij}* . Обозначим его M_{ij} .

Произведение $(-1)^{i+j} M_{ij}$ называют *алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в определителе Δ* , которое обозначим A_{ij} . Т.е. по определению

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Для элементов a_{ij} определителя Δ , сумма индексов которых $i + j$ является четной, соответствующие минор и алгебраическое дополнения совпадают.

Например, в определителе $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ минор и алгебраическое

дополнение, соответствующие элементу $a_{13} = 2$ равны:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -12.$$

Покажем, как с помощью алгебраических дополнений определитель порядка n может быть выражен через определители порядка $n-1$. Предварительно докажем два вспомогательных утверждения, касающихся определителей специального вида.

Лемма 1. *Если в определителе порядка n все элементы последней строки (столбца), кроме элемента, стоящего в нижнем правом углу, равны нулю, то определитель равен произведению этого элемента на соответствующий ему минор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равноправия строк и столбцов достаточно доказать лемму для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

По определению

$$\Delta = \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots a_{n-1,\alpha_{n-1}} a_{n\alpha_n}. \quad (18)$$

В сумме (18) каждый член содержит в качестве множителя элемент $a_{n\alpha_n}$ из последней строки определителя. Но все эти элементы, кроме a_{nn} , равны нулю. Поэтому те члены суммы (18), для которых $\alpha_n \neq n$, обращаются в нуль. Распространяя суммирование лишь на ненулевые члены (для них $\alpha_n = n$, а их число равно числу перестановок $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1})$ из чисел $1, 2, \dots, n-1$, т.е. $(n-1)!$), получим

$$\Delta = \sum_{(n-1)!} (-1)^{p(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} n)} a_{1\alpha_1} \dots a_{n-1,\alpha_{n-1}} a_{nn}. \quad (19)$$

Так как в перестановке $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} n)$ самое большое число n стоит на последнем месте и беспорядка не вносит, то

$$p(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} n) = p(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}).$$

И, следовательно, для определителя (3) получим

$$\Delta = a_{nn} \sum_{(n-1)!} (-1)^{p(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} \dots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Но сумма в полученном выражении равна определителю порядка $n-1$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

который является минором M_{nn} , соответствующим элементу a_{nn} определителя Δ . Следовательно, для определителя вида (17) получаем $\Delta = a_{nn} M_{nn}$.

□

Лемма 2. Если в определителе порядка n все элементы какой-либо строки (столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен

произведению этого элемента на соответствующее ему алгебраическое дополнение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равноправия строк и столбцов достаточно доказать лемму для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,k-1} & a_{m-1,k} & a_{m-1,k+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{mk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,k-1} & a_{m+1,k} & a_{m+1,k+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

в котором все элементы m -й строки, кроме a_{mk} , равны нулю.

Путем последовательной перестановки соседних строк и столбцов переместим элемент a_{mk} в нижний правый угол. Для этого поменяем местами m -ю строку с $(m+1)$ -й, затем с $(m+2)$ -й и т.д. и, наконец, с последней, n -й строкой. Аналогично поменяем k -й столбец с $(k+1)$ -м, затем с $(k+2)$ -м и т.д. и, наконец, с n -м столбцом. Всего придется совершить $n-m$ перестановок строк и $n-k$ перестановок столбцов.

Так как в результате любой перестановки двух рядов (строк/столбцов) знак определителя меняется, то после всех перестановок получаем:

$$\Delta = (-1)^{(n-m)+(n-k)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,k-1} & a_{m-1,k+1} & \dots & a_{m-1,n} & a_{m-1,k} \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,k-1} & a_{m+1,k+1} & \dots & a_{m+1,n} & a_{m+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} & a_{nk} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mk} \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Но по [лемме 1](#) определитель в формуле (21) равен произведению элемента a_{mk} , стоящего в правом нижнем углу, на соответствующий ему минор. Этот минор находим путем вычеркивания в определителе из формулы (21) последней строки и последнего столбца. Заметим, что

полученный минор совпадает с минором M_{mk} определителя (20), соответствующим элементу из m -й строки и k -го столбца. Тогда, учитывая, что $(-1)^{(n-m)+(n-k)} = (-1)^{m+k}$, формула (21) примет вид

$$\Delta = (-1)^{m+k} a_{mk} M_{mk} = a_m A_{mk}.$$

□

Для произвольного определителя n -го порядка справедлива следующая теорема.

Теорема разложения. *Определитель порядка n равен сумме парных произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Например, при разложении по элементам m -й строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{m1} A_{m1} + a_{m2} A_{m2} + \dots + a_{mn} A_{mn}, \quad (22)$$

а при разложении по элементам k -го столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}. \quad (23)$$

Приведенные формулы можно записать с использованием оператора суммирования:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{mj} A_{mj}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}.$$

Доказательство. Так как строки и столбцы в определителе равноправны, то достаточно проверить справедливость равенства (22). Представим каждый элемент m -й строки определителя Δ в виде суммы n слагаемых, из которых $n-1$ равны нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1} + 0 + \dots + 0) & (0 + a_{m2} + \dots + 0) & \dots & (0 + 0 + \dots + a_{mn}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Применив к определителю [свойство 6°](#), получим $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По [лемме 2](#) определитель Δ_1 равен произведению элемента a_{m1} на его алгебраическое дополнение в этом определителе. Но так как определитель Δ_1 отличается от определителя Δ (см. равенство (22)) лишь элементами m -й строки, то это алгебраическое дополнение совпадает с алгебраическим дополнением A_{m1} элемента a_{m1} определителя Δ (см. определения алгебраического дополнения и [минора](#)). Следовательно, $\Delta_1 = a_{m1}A_{m1}$. Аналогично устанавливаем, что $\Delta_2 = a_{m2}A_{m2}$, ..., $\Delta_n = a_{mn}A_{mn}$, поэтому

$$\Delta = a_{m1}A_{m1} + a_{m2}A_{m2} + \dots + a_{mn}A_{mn}.$$

□

4. Методы вычисления определителей

1. Вычисление определителя, используя [определение \(формула \(8\)\)](#). С увеличением порядка определителя число членов в сумме (8) быстро растет. Поэтому вычисление определителя высокого порядка по его определению довольно трудоемко. Формулу (8) не стоит использовать при $n > 3$.
2. Вычисление определителя, используя [теорему разложения](#) (формулы (22) и (23)).

Разложение определителя, очевидно, лучше выполнять по элементам того ряда, который содержат максимальное количество нулевых элементов.

Так при вычислении определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (24)$$

лучше разложить его по элементам либо первого столбца, либо по элементам третьей строки. Так, разложив определитель (24) по элементам первого столбца, используя формулу (23) ($k = 1$), получим:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определители 3-го порядка можно вычислить, используя правило треугольника. В результате найдем $\Delta = 78$.

Надо заметить, что по теореме разложения определитель порядка n выражается через n определителей $(n - 1)$ -го порядка. Применяя эту теорему несколько раз, можно свести вычисление определителя к вычислению некоторого числа определителей второго порядка. Однако для упрощения вычислений целесообразно предварительно преобразовать определитель так, чтобы в одном из его рядов все элементы, кроме одного, обратились в ноль. Тогда данный определитель

тель сведется к одному определителю более низкого порядка. Указанное преобразование можно выполнить, опираясь на его свойства, в частности [свойство 7](#).

Проиллюстрируем сказанное на примере вычисления определителя (24):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2I \\ \\ -I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + II \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-7 \cdot 5 - 4) = 78. \end{aligned}$$

3. Вычисление определителя *диагональной* матрицы.

- 1) Определитель матрицы, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов на главной диагонали, равен произведению всех элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \dots \cdot a_{n-1,n-1}a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}. \quad (25)$$

Формулу (25) получим, применив теорему разложения несколько раз. При этом на каждом шаге разложения определителя по элементам первой строки получается определитель такой же структуры, что и исходный, но меньшего порядка.

- 2) Определитель матрицы, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов на побочной диагонали, равен произведению всех элементов побочной диагонали со знаком, определяемым значением степени $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdot \dots \cdot a_{n-1,2} a_{n1} = \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}. \quad (26)$$

Для доказательства формулы (26) применим теорему разложения, разлагая исходный определитель и определители, которые появляются на каждом шаге, по элементам 1-й строки:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ = a_{1n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ \text{определитель порядка } (n-1)$$

Здесь и далее знак алгебраического дополнения элемента в правом верхнем углу определителя устанавливается значением степени $(-1)^{1+K}$, где K – номер столбца определителя, в котором этот элемент находится.

$$= a_{1n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot a_{2,n-1} \cdot (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & 0 & \dots & a_{4,n-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dots =$$

определитель порядка $(n-2)$

$$= a_{1n} (-1)^{n+1} a_{2,n-1} (-1)^n a_{3,n-2} (-1)^{n-1} \cdot \dots \cdot a_{n-2,3} (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1,2} \\ a_{n1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1n} (-1)^{n+1} a_{2,n-1} (-1)^n a_{3,n-2} (-1)^{n-1} \cdot \dots \cdot a_{n-2,3} (-1)^4 a_{n-1,2} (-1)^3 a_{n1}.$$

Складывая показатели степеней, которые образуют арифметическую прогрессию, будем иметь:

$$(-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\dots+4+3} = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

И, следовательно, определитель будет равен выражению

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdot \dots \cdot a_{n-1,2} a_{n1},$$

что и доказывает формулу (26).

4. Вычисление определителя *треугольной* матрицы.

- 1) Определитель, в котором ниже (или выше) главной диагонали расположены нулевые элементы, равен произведению всех элементов главной диагонали, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = a_{11}a_{22} \cdot \dots \cdot a_{n-1,n-1}a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}. \quad (27)$$

- 2) Для определителя, в котором ниже (или выше) побочной диагонали расположены нулевые элементы, справедлива формула:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1} \cdot \dots \cdot a_{n-1,2}a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}. \quad (28)$$



Используя теорему разложения, докажите формулы (27) и (28).

5. Метод приведения определителя к треугольному виду заключается в приведении определителя (с помощью элементарных преобразований) к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей равны нулю. После преобразования определителя используются формулы (27) и (28).

Так, например, если к каждой строке определителя

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix},$$

начиная со второй, прибавить первую строку, то получим

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} \stackrel{(27)}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

6. Вычисление определителя *квазидиагональной* и *квазитреугольной* матрицы.

1) Блочная матрица², у которой все клетки, кроме стоящих на главной диагонали, являются нуль-матрицами, называется *квазидиагональной*.

² Разобьем матрицу A на клетки горизонтальными и вертикальными прямыми, пересекающими всю матрицу. Например,

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array} \right).$$

Каждая клетка будет некоторой матрицей. Если для каждой из них ввести свое обозначение, например, A_i , то матрицу A можно записать в виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}.$$

Такую матрицу называют *блочной*, или *клеточной*. Особый интерес представляют блочные матрицы, имеющие квадратные диагональные блоки.

Определитель квазилинейной матрицы равен произведению определителей матриц, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_K \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_K| = \prod_{i=1}^K |A_i|. \quad (29)$$

Замечание. Квадратная матрица A_i имеет порядок n_i ($i = \overline{1, K}$). При этом порядок определителя блочной матрицы равен $n = \sum_{i=1}^K n_i$. Размеры нуль-матриц O зависят от размеров блоков на главной диагонали.

Докажем справедливость формулы (29) для определителя с двумя диагональными блоками:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований со строками и столбцами определителя Δ ([свойство 7](#) определителя), содержащих элементы матрицы B , определитель Δ можно привести виду, когда на месте блока B будет верхняя (или нижняя) треугольная матрица C :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & C \end{vmatrix},$$

где

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix},$$

и при этом $|C| = |B|$.

После этого разлагая определитель Δ по элементам последней строки (или последнего столбца), получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & O \\ O & C \end{vmatrix} = c_{mm} c_{m-1,m-1} \cdot \dots \cdot c_{11} \cdot |A| = |C| \cdot |A| = |B| \cdot |A|.$$

Формулу (29) с произвольным количеством блоков можно доказать по индукции.

2) Блочная матрица, у которой нуль-матрицами являются клетки ниже (выше) квадратных блоков на главной диагонали, называется *верхней (нижней) квазиреугольной*.

Определитель квазиреугольной матрицы равен произведению определителей матриц, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ O & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_K \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ * & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A_K \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^K |A_i|. \quad (30)$$



Докажите формулу (30).

7. Метод рекуррентных соотношений³ состоит в том, что определитель n -го порядка выражают через определители того же вида, но

³ **Рекуррентное соотношение** (уравнение) – это формула, выражающая каждый член последовательности $\{a_n\}$ через несколько предыдущих членов и номер члена последовательности, т.е. $a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-p})$. Рекур-

более низкого порядка, используя элементарные преобразования и разложение по строке или столбцу.



Пример 1. Вычислить определитель n -го порядка

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель D_n по элементам первой строки, получим:

$$D_n = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{определитель } (n-1)\text{-го порядка}} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{определитель } (n-1)\text{-го порядка}}.$$

Второй определитель разложим по элементам первого столбца. Будем иметь

$$D_n = 2 \cdot D_{n-1} - 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{определитель } (n-2)\text{-го порядка}} = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

В результате пришли к рекуррентному соотношению

$$D_n = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n > 2,$$

рекуррентное соотношение позволяет шаг за шагом определить любой член последовательности, если известны некоторые ее первые члены.

с помощью которого, зная $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, можно найти определитель любого порядка. Вычислив определитель D_3 :

$$D_3 = 2 \cdot D_2 - D_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 4,$$

Далее можно найти определитель D_4 :

$$D_4 = 2 \cdot D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5.$$

Заметим, что для найденных определителей их значения отличаются от их номера на 1. Докажем (по индукции), что

$$D_n = n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Предположим, что формула (31) справедлива при $n = k$ и $n = k + 1$. Покажем справедливость формулы (31) при $n = k + 2$. Используя рекуррентное соотношение и предположения, найдем:

$$D_{k+2} = 2 \cdot D_{k+1} - D_k = 2 \cdot (k + 1) - k = k + 2.$$

Полученное выражение для D_{k+2} доказывает справедливость формулы (31) для любых натуральных n .



Пример 2. Вычислить определитель n -го порядка

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель D_n по элементам первой строки, получим:

$$D_n = 5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{определитель } (n-1)\text{-го порядка}} - 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{определитель } (n-1)\text{-го порядка}}.$$

Второй определитель разложим по элементам первого столбца. Будем иметь

$$D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 3 \cdot 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{определитель } (n-2)\text{-го порядка}} = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

В результате пришли к рекуррентному соотношению

$$D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 6D_{n-2}, \quad n > 2, \quad (32)$$

с помощью которого, зная $D_1 = 5$, $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$, можно найти

определитель любого порядка. В отличие от предыдущего примера, даже найдя $D_3 = 5 \cdot D_2 - 6D_1 = 5 \cdot 19 - 6 \cdot 5 = 65$, трудно установить связь между номером элемента последовательности и его значением. Рассмотрим прием сведения решения рекуррентного уравнения 2-го порядка к решению уравнения 1-го порядка. Заметив, что $5 = 2 + 3$ и $6 = 2 \cdot 3$, то уравнение (32) можно записать так:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2}) \quad \text{или} \quad D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}). \quad (33)$$

После замены

$$u_n = D_n - 3D_{n-1}, \quad v_n = D_n - 2D_{n-1}, \quad (34)$$

уравнения (33) примут вид:

$$u_n = 2u_{n-1}, \quad v_n = 3v_{n-1}, \quad n > 2.$$

Полученные уравнения определяют числовые последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, которые являются геометрическими прогрессиями со знаменателями 2 и 3 соответственно. А значит, учитывая, что

$$u_2 = D_2 - 3D_1 = 19 - 3 \cdot 5 = 4, \quad v_2 = D_2 - 2D_1 = 19 - 2 \cdot 5 = 9,$$

найдем

$$u_n = u_2 \cdot 2^{n-2} = 2^n, \quad v_n = v_2 \cdot 3^{n-2} = 3^n.$$

Возвращаясь к замене, будем иметь

$$\begin{cases} D_n - 3D_{n-1} = 2^n, \\ D_n - 2D_{n-1} = 3^n, \end{cases} \Rightarrow D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Замечание. Для решения уравнения (32) можно применить следующий алгоритм.

Алгоритм решения задачи

$$(1) \quad D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots,$$

$$(2) \quad D_1 = A, \quad D_2 = B.$$

1. Составить характеристическое уравнение $\lambda^2 = a\lambda + b$ и найти его корни λ_1, λ_2 .

2. Записать **общее решение** уравнения (1) в виде:

$$1) \quad D_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \quad \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

$$2) \quad D_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n = (C_1 + nC_2)\lambda_1^n, \quad \text{если } \lambda_1 = \lambda_2.$$

Здесь C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

3. Найти произвольные постоянные C_1 и C_2 , используя условия (2).

Для этого в зависимости от вида общего решения решить систему:

$$\begin{cases} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = A, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (C_1 + C_2)\lambda_1 = A, \\ (C_1 + 2C_2)\lambda_1^2 = B \end{cases}$$

4. Найденные C_1 и C_2 подставить в общее решение.

Пример 3. Применим алгоритм к решению задачи из [примера 1](#):

$$D_n = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n > 2, \quad D_1 = 2, \quad D_2 = 3.$$

Найдем корни соответствующего характеристического уравнения:

$$\lambda^2 = 2\lambda - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Запишем общее решение рекуррентного соотношения:

$$D_n = C_1 + n \cdot C_2,$$

которое рассмотрим при $n=1$ и $n=2$ для нахождения значений постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} D_1 = C_1 + C_2 = 2, \\ D_2 = C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 1.$$

Следовательно, получили $D_n = 1 + n$.

Пример 4. Применим алгоритм к решению задачи из [примера 2](#):

$$D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 6D_{n-2}, \quad n > 2, \quad D_1 = 5, \quad D_2 = 19.$$

Найдем корни соответствующего характеристического уравнения:

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2.$$

Запишем общее решение рекуррентного соотношения:

$$D_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n,$$

и рассмотрим его при $n=1$ и $n=2$ для нахождения значений постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} D_1 = 3C_1 + 2C_2 = 5, \\ D_2 = 9C_1 + 4C_2 = 19 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3, C_2 = -2.$$

В результате получаем, что $D_n = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

5. Определитель произведения матриц

Теорема. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц.*

Доказательство. Пусть A и B – квадратные матрицы размерности n . Рассмотрим вспомогательный определитель блочной матрицы:

$$d = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix},$$

где $-E = -1 \cdot E$. Для него по формуле (30) имеем $d = |A| \cdot |B|$. Вычислим этот же определитель другим способом, выполнив его преобразование-

ем таким образом, чтобы вместо матрицы B получить нулевую матрицу:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix}.$$

Для этого с определителем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad (35)$$

проделаем следующие преобразования. Сначала первый столбец умножим на b_{11} и сложим с $(n+1)$ -м столбцом, затем второй столбец умножим на b_{21} и сложим с $(n+1)$ -м столбцом, и далее, умножаем каждый следующий столбец j до n -го на b_{j1} и складываем с $(n+1)$ -м, получим в результате вместо 1-го столбца матрицы B нулевой столбец. Аналогичные действия выполняем для преобразования всех остальных столбцов. При этом для элементов матрицы C получим

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Выражение для c_{ij} совпадает с тем, которое определяет элемент на пересечении i -ой строки и j -го столбца матрицы, получаемой в результате умножения матрицы A на B . Т.е. в результате описанных преобразований определителя (35) получим, что $C=AB$. Так как

$$d = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & A \\ 0 & -E \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n |-E| |AB| = (-1)^n (-1)^n |AB| = (-1)^{2n} |AB| = |AB|.$$

Следовательно, вычисление одного и того же определителя двумя способами дает $d=|AB|=|A||B|$.

Замечание. Определитель $\begin{vmatrix} AB & A \\ 0 & -E \end{vmatrix}$ получен из определителя $\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{vmatrix}$ путем перестановки 1-го столбца с $(n+1)$ -м столбцом, 2-го с $(n+2)$ -м и так далее до перестановки n -го с $2n$ -м. Всего таких перестановок n .

□

6. Теоремы замещения и аннулирования

Теорема замещения. Сумма парных произведений алгебраических дополнений элементов какого-нибудь ряда определителя Δ на любые числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равна определителю, получаемому из определителя Δ заменой упомянутого ряда числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выделим в определителе Δ какой-нибудь ряд, например k -й столбец:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначим алгебраические дополнения элементов k -го столбца определителя через A_{ik} ($i=1,2,\dots,n$). И рассмотрим определитель D , получаемый из Δ заменой элементов k -го столбца числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \lambda_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, алгебраические дополнения элементов k -го столбца определителя D совпадают с алгебраическими дополнениями A_{ik} опреде-

лителя Δ . Разложив определитель D по элементам k -го столбца, получим

$$D = \lambda_1 A_{1k} + \lambda_2 A_{2k} + \dots + \lambda_n A_{nk}.$$

Полученная сумма соответствует сумме парных произведений алгебраических дополнений элементов k -го столбца (произвольно выбранного ряда) определителя Δ на числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, что и доказывает теорему.

□

Теорема аннулирования⁴. *Сумма парных произведений элементов какого-нибудь ряда определителя на алгебраические дополнения элементов другого, но параллельного ряда равна нулю.*

До к а з а т е л ь с т в о. Пусть выбраны два параллельных ряда определителя Δ , например два различных столбца l и k (и при этом пусть $l < k$). Рассмотрим сумму парных произведений элементов l -го столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов k -го столбца:

$$a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \dots + a_{nl}A_{nk},$$

которая в соответствии с теоремой замещения равна определителю D , получаемому из определителя Δ заменой элементов k -го столбца соответствующими элементами l -го столбца, т.е.

$$a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \dots + a_{nl}A_{nk} = D,$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так как в определителе D столбцы l и k одинаковы, то по [свойству 3](#) определителей он равен 0. Следовательно,

$$a_{1l}A_{1k} + a_{2l}A_{2k} + \dots + a_{nl}A_{nk} = 0 \quad (l \neq k).$$

□

⁴ В учебной литературе можно встретить название теоремы - «фальшивое разложение определителя».

Если ввести величину

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

называемую *символом Кронекера*, то теорему разложения и теорему аннулирования можно записать в компактной форме следующим образом. При разложении по элементам столбца в виде:

$$\sum_{i=1}^n a_{il} A_{ik} = \delta_{lk} \Delta,$$

а при разложении по элементам строки в виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{lj} A_{kj} = \delta_{lk} \Delta.$$

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с.
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТ-ЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.