Лекция № 3

Определители n-го порядка

Элементарные сведения о перестановках

Рассмотрим n целых чисел 1, 2, …, n. Их можно располагать в различном порядке. Всевозможные расположения этих чисел называют *перестановками*. Перестановка (1 2 … n), в которой числа идут в порядке возрастания, называется *натуральной*.

Пример 1. При n = 3 возможны перестановки

(1 2 3), (1 3 2), (2 1 3), (2 3 1), (3 1 2), (3 2 1).

Их число равно 3! = 6.

Методом математической индукции докажите, что из n элементов можно составить n! перестановок.

Назовем *беспорядком* (или *инверсией*) в перестановке тот факт, что большее число стоит перед меньшим. Например, в перестановке (3 1 2 4) имеется два беспорядка: число 3 стоит перед числами 1 и 2.

Определите число беспорядков в перестановках из трех элементов: (1 2 3), (1 3 2), (2 1 3), (2 3 1), (3 1 2), (3 2 1).

Число беспорядков в перестановках может быть четным либо нечетным. Перестановки с четным числом беспорядков называются *четными*, перестановки с нечетным числом беспорядков называются *нечетными*. Например, перестановка (3 1 2 4) является четной.

Какие из перестановок трех элементов (1 2 3), (1 3 2), (2 1 3), (2 3 1), (3 1 2), (3 2 1) являются четными, а какие нечетными?

Обмен местами двух элементов в перестановке называется *транспозицией*. Транспозиция переводит одну перестановку в другую. Например, перестановка (1 2 3 4) в результате транспозиции 2 $\leftrightarrow$ 4 перейдет в перестановку (1 4 3 2). Совершив несколько транспозиций, можно из одной перестановки получить любую другую.

Пример 2. Перестановка (1 3 4 2) переводится в перестановку (2 4 1 3) с помощью следующих транспозиций:

$$(1\ 3\ 4\ 2) \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} (2\ 3\ 4\ 1) \xrightarrow{3\leftrightarrow 4} (2\ 4\ 3\ 1) \xrightarrow{3\leftrightarrow 1} (2\ 4\ 1\ 3).$$

Этот перевод, конечно, можно выполнить не единственным образом.

Докажем, что *одна транспозиция меняет четность перестановки*, т.е. четная перестановка становится нечетной, а нечетная четной.

Рассмотрим сначала частный случай, когда совершается транспозиция двух соседних элементов. Исследуем перестановку

$$(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_k\alpha_{k+1}\ \dots\ \alpha_n). \tag{1}$$

Здесь через α_k обозначен элемент, т.е. некоторое число из совокупности 1, 2, …, n. Индекс в обозначении α_k указывает на место элемента в перестановке (1). Транспозиция элементов, стоящих на k-м и k+1-м местах, приводит к перестановке

$$(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_{k+1}\alpha_k\ \dots\ \alpha_n). \tag{2}$$

Если числа α_k, α_{k+1} стоят в беспорядке, т.е. $\alpha_k > \alpha_{k+1}$, то в последовательности чисел α_{k+1}, α_k беспорядка нет. И наоборот, если в последовательности чисел α_k, α_{k+1} нет беспорядка, то числа α_{k+1}, α_k стоят в беспорядке. Относительно остальных элементов перестановки число беспорядков при указанной транспозиции не изменится. Следовательно, число беспорядков в перестановке (2) на единицу отличается от числа беспорядков в перестановке (1). Поэтому перестановки имеют разную четность.

Рассмотрим общий случай - транспозицию любых элементов перестановки. Пусть между элементами α_k и α_l в перестановке

$$(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_k\ \dots\ \alpha_l\ \dots\ \alpha_n) \tag{3}$$

имеется s других чисел. Транспозиция элементов α_k и α_l приведет к перестановке

$$(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_l\ \dots\ \alpha_k\ \dots\ \alpha_n), \tag{4}$$

причем между элементами α_l и α_k стоят те же s чисел, что и между элементами α_k и α_l в перестановке (3), и в том же порядке. Покажем, что перестановки (3) и (4) имеют разную четность.

Переведем перестановку (3) в перестановку (4) посредством нескольких транспозиций рядом стоящих элементов. Выполнив s транспозиций, переместим элемент α_k вправо и поставим перед элементом α_l. Затем, выполнив s + 1 транспозиций соседних элементов, переместим элемент α_l влево на место α_k. Всего будет выполнено 2s + 1 транспозиций рядом стоящих элементов. Каждая из них согласно доказанному меняет четность перестановки. Так как 2s + 1 нечетное число, то перестановки (3) и (4) обладают разной четностью.

Определители любого порядка и их свойства

Рассмотрим определитель 3-го порядка и исследуем его структуру. Выпишем выражение для определителя, причем в каждом слагаемом сомножители a_{ij} расставим в такой последовательности, чтобы их первые индексы образовали натуральную перестановку $(1\ 2\ 3)$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Из приведенной формулы видно, что определитель третьего порядка представляет собой алгебраическую сумму 3! Членов, каждый из которых является произведением трех элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Причем со знаком «+» берутся те члены определителя, вторые индексы элементов которых образуют четные перестановки (1 2 3), (2 3 1), (3 1 2), а со знаком «$-$» те его члены, вторые индексы элементов которых образуют нечетные перестановки (3 2 1), (2 1 3), (1 3 2).

Обобщив это закон образования определителя третьего порядка, дадим определение определителя любого порядка n.

Рассмотрим квадратную матрицу, содержащую n строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Определителем n-го порядка, соответствующим матрице (1), называется алгебраическая сумма n! членов, каждый из которых представляет собой произведение n элементов a_{ij}, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца; при этом член определителя берется со знаком «+», если вторые индексы его элементов образуют четную перестановку, и со знаком «–», если эта перестановка нечетная (тогда как первые индексы образуют натуральную перестановку).

Определитель n-го обозначается так:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Для примера найдем, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка некоторые произведения его элементов:

Произведения $a_{12}a_{23}a_{34}$ и $a_{12}a_{23}a_{34}a_{44}a_{31}$	не являются членами определителя четвертого порядка, так как число сомножителей в них не равно четырем
Произведение $a_{12}a_{24}a_{31}a_{41}$	не является членом определителя четвертого порядка, так как не содержит элемента из третьего столбца. В него

	входят два сомножителя (a_{31} и a_{41}) из первого столбца
Произведения $a_{12}a_{44}a_{33}a_{21}$ и $a_{12}a_{34}a_{43}a_{21}$	Входят в определитель четвертого порядка, так как они содержат сомножители, взятые по одному из каждой строки и каждого столбца. Расставив сомножители так, чтобы первые индексы образовали натуральную перестановку: $a_{12}a_{44}a_{33}a_{21} = a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$, $a_{12}a_{34}a_{43}a_{21} = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$, Определим четность перестановок из вторых индексов. Так как перестановка (2 1 3 4) нечетная (содержит один беспорядок), то член $a_{12}a_{44}a_{33}a_{21}$ входит в определитель со знаком «–». Перестановка (2 1 4 3) четная (два беспорядка). Поэтому член $a_{12}a_{34}a_{43}a_{21}$ входит в определитель со знаком «+».

Введем величину

$$p(\alpha_1\alpha_2\ \dots\ \alpha_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) - \text{ нечетная перестановка,} \\ 2, & \text{если } (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) - \text{ четная перестановка.} \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда по данному выше определению

$$\Delta = \sum_{n!} (-1)^{p(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}. \qquad (4)$$

Здесь суммирование распространяется на все перестановки $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ из n чисел 1. 2, …, n, что условно обозначено символов $n!$ под знаком суммы $\sum$. Если перестановка $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ четная, то $(-1)^{p(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)} = 1,$ если перестановка $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ нечетная, то $(-1)^{p(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)} = -1.$

С увеличением порядка определителя число его членов быстро растет. Определитель четвертого порядка содержит всего 4! = 24 члена, а определитель седьмого порядка уже 7! = 5040. Поэтому вычисление определителя высокого порядка по его определению довольно трудоемко. В то же время существуют менее трудоемкие способы вычисления, основанные на применении свойств определителей.

Определители n-го порядка обладают теми же свойствами, что и определители 2-го и 3-го порядка.

1°. *Величина определителя не меняется при его транспонировании.*

√ Из этого свойства вытекает, что строки и столбцы определителя равноправны. Поэтому любое свойство, доказанное для строк, справедливо и для столбцов.

2°. *Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то у него изменится только знак, а абсолютная величина останется прежней.*

3°. *Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.*

4°. *Если все элементы строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.*

Из свойств 3° и 4° следует:

5°. *Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.*

6°. *Если все элементы строки (столбца) являются суммами из одинакового количества слагаемых, то определитель равен сумме определителей, в которых элементами этой строки (столбца) служат отдельные слагаемые.*

7°. *Величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умножив их предварительно на один и тот же множитель.*

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974
2. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
3. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.

4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.