Лекция № 11

Квадратичные формы (продолжение[1])

1. Преобразование квадратичной формы методом ортогональных преобразований

Будем рассматривать квадратичную форму

$$Q(x) = X^T A X, \tag{1}$$

где X – вектор-столбец переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $A = (a_{ij})$ – симметричная матрица с вещественными элементами a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$.

Для симметричной матрицы порядка n справедливы следующие утверждения[2]:

1. Все собственные значения матрицы вещественны.
2. Собственные векторы вещественной симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны[3].
3. Симметричная матрица даже при наличии кратных собственных значений всегда имеет n линейно независимых (и попарно ортогональных) собственных векторов.

Пусть известны все собственные значения матрицы A: λ_i, $i = \overline{1, n}$, и найдены соответствующие им n попарно ортогональных собственных векторов X_i. При этом имеем ортогональную систему из n векторов, для которых справедливы следующие равенства:

$$AX_i = \lambda_i X_i, \quad (X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Так как вектора $X_1, X_2, \ldots, X_n$ линейно независимы, то они образуют базис в n-мерном арифметическом пространстве, причем ортогональный. Нормируя эту систему векторов:

$$h_i = \frac{X_i}{|X_i|}, \quad |X_i| = \sqrt{(X_i, X_i)}, \; i = \overline{1, n},$$

---

[1] Продолжение Лекции 10

[2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[3] Свойство собственных векторов симметричной матрицы. Доказательство см. Лекцию 9.

получим ортонормированный базис из векторов $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n,$ которые также являются собственными векторами матрицы A и для них справедливы равенства:

$$Ah_i = \lambda_i h_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$(h_i, h_j) = h_i^T h_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Составим из векторов-столбцов $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n$ матрицу

$$B = (h_1, h_2, ..., h_n), \tag{5}$$

которая, очевидно, является квадратной матрицей порядка n и, в силу линейной независимости векторов, из которых она составлена, невырожденной $(|B| \neq 0)$. Так как для столбцов матрицы B справедливы равенства (3) и (4), то легко установить, что

$$AB = (\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2, \ldots, \lambda_n h_n), \qquad B^T B = E. \tag{6}$$

Первое равенство представляет собой матричную запись системы равенств (3). А так как элементы матрицы $C = B^T B$ равны

$$c_{ij} = h_i^T h_j = (h_i, h_j),\ i, j = \overline{1,n},$$

то, в силу условий, (4) получим $C = E$.

Квадратную матрицу B, для которой справедливо равенство $B^T B = E$, называют *ортогональной*. Заметим, что для ортогональной матрицы B справедливо следующее: $B^T = B^{-1}$.

Далее выясним, какой вид примет квадратичная форма (1), если выполнить линейное невырожденное преобразование переменных $X = BY$, где Y – столбец новых переменных $y_1, y_2, ..., y_n$. Для этого найдем матрицу квадратичной формы в новых переменных

$$\tilde{A} = B^T AB = B^T (AB) \overset{(6)}{=} B^T (\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2, \ldots, \lambda_n h_n).$$

Очевидно, элементы $\tilde{a}_{ij}$ матрицы $\tilde{A}$ равны:

$$\tilde{a}_{ij} = h_i^T \lambda_j h_j = \lambda_j (h_i^T h_j) \overset{(4)}{=} \begin{cases} \lambda_i, & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, получили, что матрица $\tilde{A}$ будет диагональной. А значит линейное преобразование $X = BY$ с матрицей (5) приводит квадратичную форму (1) к каноническому виду, когда коэффициентами при квадратах новых переменных будут собственные значения матрицы A:

$$\boxed{\tilde{Q}(y) = Y^T \tilde{A} Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.} \qquad (7)$$

Поскольку матрица B является ортогональной, то преобразование квадратичной формы называют *ортогональным.*

Алгоритм приведения квадратичной формы $Q(x) = X^T AX$ ***к каноническому виду методом ортогональных преобразований*** включает следующие действия:

1. Для матрицы $A = (a_{ij})$ квадратичной формы найти все собственные значения, решая соответствующее характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

   Установить все различные собственные значения λ_i и соответствующие им кратности n_i.

2. Для каждого собственного значения λ_i построить фундаментальную систему решений (ФСР) для уравнения:

$$(A - \lambda_i E)X = 0. \qquad (*)$$

   1) в случае простого собственного значения фундаментальное решение уравнения дает один соответствующий собственный вектор.
   2) если собственное значение имеет кратность k, то уравнение (*) имеет ровно k линейно независимых решений, которые дают k собственных векторов. Попарную ортогональность векторов можно обеспечить за счет подходящего выбора значений свободных переменных или, используя метод ортогонализации системы векторов. В результате получим набор из k попарно ортогональных собственных векторов, соответствующих кратному собственному значению.

Таким образом, получим n линейно независимых векторов, образующих *ортогональный базис* из собственных векторов матрицы A.

3. Выполнить нормирование построенной ортогональной системы векторов:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \xrightarrow{h_i = \frac{X_i}{|X_i|}} (h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

4. Составить матрицу преобразования из векторов *ортонормированной системы*:

$$B = (h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

5. Записать канонический вид квадратичной формы

$$\tilde{Q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

который получается с помощью линейного преобразования переменных $X = BY$, где $Y -$ вектор-столбец новых переменных квадратичной формы $y_1, y_2, ..., y_n$.

Пример 1. Привести квадратичную форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3. \qquad (1.1)$$

к каноническому виду, используя метод ортогональных преобразований. Найти линейное преобразование.

Решение. Для матрицы квадратичной формы (1.1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

найдем собственные значения:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 6)(\lambda + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = 6, \;\; \lambda_3 = -4.$$

Таким образом, матрица A имеет три различных собственных значения.

Для каждого собственного значения λ_i найдем соответствующий ему собственный вектор X_i.

1) Для $\lambda_1 = 1$ найдем ФСР уравнения $(A - \lambda_1 E)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times\frac{1}{3} \\ \\ -\frac{4}{3} I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3} x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг матрицы системы равен 2, то система имеет одну свободную переменную. Полагая $x_3 = 3$, найдем

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Два других собственных вектора найдем с помощью алгебраических дополнений.

2) Для $\lambda_2 = 6$ найдем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 9,\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 15,\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12,$

и $\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, то $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3) Для $\lambda_3 = -4$ найдем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}=-15,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}=12,$

и $\begin{pmatrix}9\\ -15\\ 12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$, то $X_3=\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$.

Можно проверить попарную ортогональность полученной системы векторов (X_1, X_2, X_3):

$$(X_1, X_2) = -4\cdot 3+0\cdot 5+3\cdot 4=0,\quad (X_1, X_3)=-4\cdot 3+0\cdot(-5)+3\cdot 4=0,$$
$$(X_2, X_3)=3\cdot 3+5\cdot(-5)+4\cdot 4=0.$$

Так как $|X_1|=\sqrt{(-4)^2+0^2+3^2}=5\neq 1,\ |X_2|=\sqrt{3^2+5^2+4^2}=5\sqrt{2}\neq 1,$ $|X_3|=\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2}=5\sqrt{2}\neq 1,$ то после нормировки системы векторов (X_1, X_2, X_3) получим ортонормированный базис из векторов:

$$h_1=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ 0\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix},\quad h_2=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 4\end{pmatrix},\quad h_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 4\end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью линейного преобразования $X=BY$ с матрицей

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

квадратичная форма (1.1) приводится к каноническому виду:

$$\tilde{Q}(y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=y_1^2+6y_2^2-4y_3^2.$$

Проверьте справедливость равенства $\tilde{A}=B^T AB.$

■

Пример 2. Привести квадратичную форму

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3. \qquad (2.1)$$

к каноническому виду, используя метод ортогональных преобразований. Найти линейное преобразование.

Решение. Составим матрицу A квадратичной формы (2.1)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

и найдем ее собственные значения, решая характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=0 \quad\Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda+1)^2(\lambda-5)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=-1,\ \ \lambda_3=4.$$

Таким образом, матрица A имеет два различных собственных значения, одно из них $(\lambda_1=-1)$ имеет кратность, равную двум.

1) Для $\lambda_1=-1$ построим ФСР уравнения $(A-\lambda_1 E)X=0$:

$$\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\times\frac{1}{2}\\-I\\-I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad x_1+x_2+x_3=0. \qquad (2.2)$$

Так как ранг матрицы системы равен 1, то система имеет две свободные переменные. Пусть переменная x_1 является базовой. Тогда, выбирая для свободных переменных значения $x_2=1,\ x_3=0$ и затем $x_2=0,\ x_3=1$, найдем два линейно независимых вектора

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Но при таком выборе значений свободных неизвестных эти векторы не будут ортогональными:

$$(X_1, X_2) = -1\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Конечно, за счет подходящего выбора значений свободных переменных можно обеспечить выполнение требуемого свойства для искомых векторов, например, следующим образом. Строя ФСР для уравнения (2.2), первый вектор найдем, полагая $x_2 = 1,\ x_3 = 0$. Тогда

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А для нахождения второго вектора X_2 к уравнению (2.2) добавим еще одно уравнение, которое является условием ортогональности векторов X_1 и X_2, т.е. будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (X_1, X_2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ранг матрицы системы (2.3), очевидно, равен двум. Выбирая в качестве базовых неизвестных x_1 и x_3 и полагая для свободной неизвестной $x_2 = 1,$ найдем вектор

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Построенные таким образом векторы

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

являются линейно независимыми собственными векторами для матрицы A, соответствующими одному и тому же собственному значению $\lambda_1 = -1$ (так как оба удовлетворяют уравнению (2.2)). И, кроме того, являются ортогональными по построению:

$$(X_1, X_2) = -1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) = 0.$$

При этом они имеют следующие длины $|X_1| = \sqrt{2}, \quad |X_2| = \sqrt{6}.$

2) Собственное значение $\lambda_3 = 5$ является простым корнем характеристического уравнения, и соответствующий ему собственный вектор можно найти с помощью алгебраических дополнений. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12,$

и $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$ то $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |X_3| = \sqrt{3}.$

Можно проверить, что вектор X_3 ортогонален векторам (2.4):

$$(X_1, X_3) = -1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0, \quad (X_2, X_3) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 = 0.$$

Выполнив нормировку построенной системы векторов (X_1, X_2, X_3), получим ортонормированный базис из векторов:

$$h_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью линейного преобразования $X = BY$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

квадратичная форма (2.1) приводится к каноническому виду:

$$\tilde{Q}(y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2.$$

Проверьте справедливость равенства $\tilde{A}=B^T AB.$

■

2. Закон инерции вещественных квадратичных форм

Квадратичные формы можно привести к каноническому виду с помощью различных (необязательно ортогональных) линейных преобразований переменных. Следует отметить, что канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, определяется *неоднозначно*: *коэффициенты квадратичной формы будут различаться в зависимости от метода преобразования исходной квадратичной формы*. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема (закон инерции квадратичных форм). *Количество положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависят от невырожденной линейной замены переменных, приводящей вещественную квадратичную форму к каноническому виду.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма $Q(x)=X^T AX$ приведена к каноническому виду двумя способами:

$$\tilde{Q}_1(y)=\alpha_1 y_1^2+\alpha_2 y_2^2+\ldots+\alpha_p y_p^2+\alpha_{p+1}y_{p+1}^2+\ldots+\alpha_n y_n^2, \qquad (8)$$

$$\tilde{Q}_2(z)=\beta_1 z_1^2+\beta_2 z_2^2+\ldots+\beta_q z_q^2+\beta_{q+1}z_{q+1}^2+\ldots+\beta_n z_n^2. \qquad (9)$$

При этом квадратичная форма (1) приведена к каноническому виду (8) с помощью линейного невырожденного преобразования с матрицей B:

$$X=BY, \qquad (10)$$

а к виду (9) – с помощью линейного невырожденного преобразования с матрицей C:

$$X=CZ. \qquad (11)$$

Надо доказать, что формы (8) и (9) содержать одинаковое число положительных, одинаковое число отрицательных коэффициентов, а также одно и то же число коэффициентов, равных нулю.

Заметим, что так как матрицы преобразований (10) и (11) невырожденные, то существуют обратные преобразования, т.е.

$$Y = B^{-1}X, \quad Z = C^{-1}X. \tag{12}$$

Докажем сначала, что обе формы содержат одинаковое число положительных коэффициентов. Пусть в форме (8) p коэффициентов положительны, а остальные $n-p$ коэффициентов либо отрицательны, либо равны нулю. Будем считать, что положительными являются первые p коэффициентов: $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_p > 0,$ так как этого всегда можно добиться перенумерацией переменных. Далее, пусть в форме (9) q коэффициентов положительны ($\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0, \ldots, \beta_q > 0$), а остальные $n-q$ коэффициентов либо отрицательны, либо равны нулю: $\beta_{q+1} \le 0,$ $\beta_{q+2} \le 0, ..., \beta_n \le 0.$ Нужно доказать, что $p=q$.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $p \neq q$. Для определенности будем считать, что $p>q$ (предположение $p<q$ рассматривается аналогично).

Найдем в n-мерном пространстве точку M, обладающую следующими свойствами:

1) среди ее старых координат $x_1, x_2, ..., x_n$ имеются ненулевые: $X \neq 0$;
2) среди ее новых координат (в двух новых базисах) нулевыми являются следующие:

$$\begin{gathered} y_{p+1} = 0,\ \ y_{p+2} = 0,\ \ \ldots,\ \ y_n = 0, \\ z_1 = 0,\ \ z_2 = 0,\ \ \ldots,\ \ \mathrm{z}_q = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Покажем, что такая точка существует. Из обратных преобразований (12) следует, что старые координаты точки M должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_{ik} x_k = 0 \quad (i = p+1, p+1, \ldots, n), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q). \end{cases} \tag{14}$$

Коэффициенты $\tilde{b}_{ik}$ в уравнениях системы (14) – это элементы матрицы B^{-1}, а коэффициенты $\tilde{c}_{ik}$ – элементы матрицы C^{-1}. В системе (14) n неизвестных, но всего $(n-p)+q = n-(p-q) < n$ уравнений (по предположению $p > q$). Так как система (14) однородная и количество уравнений меньше количества неизвестных, то она имеет бесконечное множество решений, а значит, имеет ненулевые решения. Любое ненулевое решение системы (14) можно взять в качестве старых координат $x_1, x_2, ..., x_n$ искомой точки M.

Так как среди старых координат точки M имеются ненулевые $(X \neq 0)$, то ее новые координаты $y_1, y_2, ..., y_n$ не могут все быть равными нулю (в противном случае, если бы $Y = 0$, то пришли бы к тому, что $X = BY = 0$). Но по (13) $y_{p+1} = y_{p+2} = \ldots = y_n = 0.$ Поэтому среди остальных координат $y_1, y_2, ..., y_p$ точки M есть отличные от нуля.
Рассмотрим значения квадратичных форм (8) и (9) в точке M. В силу условий (13) получим:

$$\tilde{Q}_1(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2, \tag{15}$$

$$\tilde{Q}_2(z) = \beta_q z_q^2 + \beta_{q+1} z_{q+1}^2 + \ldots + \beta_n z_n^2. \tag{16}$$

Так как в выражении (15) коэффициенты $\alpha_i > 0,\ i = \overline{1, p},$ а среди чисел $y_1, y_2, ..., y_p$ есть ненулевые, то $\tilde{Q}_1(y) < 0.$ Так как в выражении (16) коэффициенты $\beta_i \leq 0,\ i = \overline{q+1, n},$ то $\tilde{Q}_2(z) \leq 0.$ Получили противоречие с тем, что

$$\left.\begin{aligned} Q(X) = Q(BY) = \tilde{Q}_1(Y), \\ Q(X) = Q(CZ) = \tilde{Q}_2(Z), \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{Q}_1(Y) = \tilde{Q}_2(Z).$$

Значит, предположение $p \neq q$ неверно. Следовательно, доказали, что $p = q.$

Докажем теперь, что формы (8) и (9) содержат одинаковое число отрицательных коэффициентов. Наряду с формой $Q(x)$ рассмотрим форму $-Q(x).$ Приведя форму $-Q(x)$ к каноническому виду (с помощью тех же преобразований (10) и (11)), получим две новые квадратичные формы, которые отличаются от форм (8) и (9) только знаком. Отрицательные коэффициенты форм (8) и (9) в новых формах будут положительными. Но по доказанному число положительных коэффициентов не зависит от способа преобразования квадратичной формы. Значит, число отрицательных коэффициентах в формах (8) и (9) одинаково.

Наконец, число нулевых коэффициентов в формах (8) и (9) также не может быть различным, так как общее число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов в каждой форме равно одному и тому же числу n. □

3. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра

Закон инерции позволяет дать некоторую классификацию вещественных квадратичных форм.

Определение 1. Квадратичную форму $Q(x)$ называют *положительно определенной*, если $Q(x) > 0$ для любого $x \neq 0$, и *отрицательно определенной*, если $Q(x) < 0$ для любого $x \neq 0$.

Определение 2. Квадратичные формы, для которых при любых x выполнены неравенства $Q(x) \geq 0$ $(Q(x) \leq 0)$, называют соответственно *неотрицательно* (*неположительно*) *определенными*, причем существует $x \neq 0$, для которого $Q(x) = 0$.

Определение 3. Квадратичную форму называют *знакопеременной* (*неопределенной*), если существуют такие x и y, что $Q(x) > 0$ и $Q(y) < 0$.

Примеры. Квадратичная форма:

а) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2$ – положительно определенная;

б) $Q(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2$ – отрицательно определенная;

в) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 3x_2^2$ – знакопеременная, так как она принимает как положительные, так и отрицательные значения. Например, $Q(1,0) = -1 < 0$, $Q(0,1) = 3 > 0$.

Знакопостоянность квадратичной формы в общем случае легко устанавливается путем приведения ее к каноническому виду одним из рассмотренных методов (метод Лагранжа и метод ортогональных преобразований). Ясно, что, например, положительно определенная квадратичная форма приводится к сумме квадратов с положительными коэффициентами, а знакопеременная квадратичная форма имеет в приведенном каноническом виде как положительные, так и отрицательные коэффициенты.

В случае, если квадратичная форма приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования, тип квадратичной формы определяется через множество собственных значений ее матрицы:

1) если все собственные значения положительны, то квадратичная форма положительно определенная:
$$((\lambda_i > 0,\ i = \overline{1,n}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \neq 0:\ Q(x) > 0);$$
2) если все собственные значения отрицательны, то квадратичная форма отрицательно определенная:
$$(\lambda_i < 0,\ i = \overline{1,n}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \neq 0:\ Q(x) < 0);$$
3) если есть собственные значения разных знаков, то квадратичная форма знакопеременная:
$$(\exists \lambda_i > 0,\ \exists \lambda_j < 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x:\ Q(x) > 0,\ \exists y:\ Q(y) < 0).$$
4) если есть нулевое собственное значение, то квадратичная форма вырожденная:
$$(\exists \lambda_i = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x:\ \ x \neq 0,\ Q(x) = 0).$$

Однако такая классификация квадратичных форм требует довольно значительных вычислений (например, применяя метод ортогональных преобразований, нужно вычислять собственные значения). Поэтому полезно иметь способ определения типа данной квадратичной формы, не приводя ее к каноническому виду и не вычисляя собственных значений.

Определение 4. Для квадратной матрицы
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
определители
$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_n = |A|.$$
называют *угловыми* (или *главными*) *минорами* этой матрицы.

Теорема (Критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма* $Q(x)=X^TAX$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы* A *были положительны:*

$$\Delta_1>0,\ \ \Delta_2>0,\ \ \ldots,\ \Delta_n>0.$$

Следствие. *Для того чтобы квадратичная форма* $Q(x)=X^TAX$ *была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность угловых миноров ее матрицы была знакочередующейся:*

$$\Delta_1<0,\ \ \Delta_2>0,\ \Delta_3>0,\ \ \ldots,\ \ (-1)^n\Delta_n>0.$$

Пример 3. Используя критерий Сильвестра, выяснить является ли квадратичная форма

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+11x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3. \qquad (3.1)$$

положительно определенной.

Решение. Для матрицы квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 11\end{pmatrix}$$

вычислим угловые миноры

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=1>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 11\end{vmatrix}=1>0.$$

Все угловые миноры положительны. Следовательно, квадратичная форма положительно определенная.

Приведите квадратичную форму (3.1) к каноническому виду.

■

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.