

Лекция № 10

Квадратичные формы и их преобразования

1. Квадратичная форма и матрица квадратичной формы

Определение 1. *Квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени с действительными коэффициентами a_{ij} :*

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию симметричности $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Определение 2. Симметричная матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы (1), называется *матрицей квадратичной формы*. Ее определитель называют *дискриминантом квадратичной формы*, а ранг матрицы – *рангом квадратичной формы*.

◀ **Примеры.** Матрица квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 +$

$+ x_2x_3$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ определяет квадратичную форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \quad \blacktriangleright$$

Составим из переменных квадратичной формы матрицу-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Так как сумма $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ является суммой парных произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы столбца X , то развернув сумму в выражении (1) по индексу i

$$Q(x) = x_1 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j.$$

заметим, что она является произведением строки X^T на столбец AX . И, следовательно, квадратичную форму (1) можно записать в матричном виде:

$$Q(x) = X^T AX. \quad (2)$$

Надо отметить, что столбец X состоит из координат вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в некотором базисе $\{e\}$.

2. Преобразование матрицы квадратичной формы

Рассмотрим линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученных разложением вектора $\vec{a}$ в базисе $\{e\} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, при переходе к новому базису $\{e'\} = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$. Между старыми x_i и новыми y_i , $i = \overline{1, n}$, координатами вектора $\vec{a}$ имеет место следующая зависимость

$$X = BY, \quad (3)$$

где X и Y - столбцы старых и новых координат вектора $\vec{a}$, B - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$ (матрица линейного преобразования). Если матрица B - невырожденная (т.е. $|B| \neq 0$), то преобразование (3) называют *невырожденным*. Если $|B| = 0$, то преобразование (3) называют *вырожденным*.

Выясним, какой вид принимает квадратичная форма (2) при линейном преобразовании (3):

$$Q(x) = X^T AX = (BY)^T A(BY) = Y^T (B^T AB)Y = Y^T \tilde{A}Y = \tilde{Q}(y).$$

Здесь $\tilde{A} = B^T AB$ - матрица полученной после преобразования (3) квадратичной формы

$$\tilde{Q}(y) = \tilde{Q}(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T \tilde{A}Y. \quad (4)$$

Можно показать, что матрица $\tilde{A}$ является симметричной, т.е. она не изменяется при транспонировании:

$$\tilde{A}^T = (B^T A B)^T = (A B)^T (B^T)^T = B^T A^T B = B^T A B = \tilde{A}.$$

Таким образом, при линейном преобразовании (3) квадратичная форма (2) переходит в квадратичную форму (4) с матрицей

$$\tilde{A} = B^T A B. \quad (5)$$

Если квадратичная форма преобразуется с помощью последовательности m линейных преобразований вида (3) с матрицами B_i :

$$Q(X) \xrightarrow{X=B_1 Y_1} Q_1(Y_1) \xrightarrow{Y_1=B_2 Y_2} Q_2(Y_2) \rightarrow \dots \xrightarrow{Y_{m-1}=B_m Y} Q_m(Y),$$

$$Q(X) = Q(B_1 Y_1) = Q(B_1 B_2 Y_2) = \dots = Q(B_1 B_2 \dots B_m Y),$$

то матрица преобразования, с помощью которого исходная квадратичная форма Q приводится к виду Q_m , будет равна:

$$B = B_1 B_2 \cdot \dots \cdot B_m.$$

Определение 3. Две квадратичные формы, получающиеся одна из другой с помощью невырожденного линейного преобразования переменных, называют *эквивалентными*.

В приложениях часто возникает задача приведения квадратичной формы к наиболее простому виду – каноническому. Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если ее матрица является диагональной, другими словами, в квадратичной форме имеются только члены с квадратами переменных, а все попарные произведения переменных отсутствуют (соответствующие коэффициенты равны 0):

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2. \quad (6)$$

Если коэффициенты α_i квадратичной форма (6) принимают значения на множестве чисел $\{\pm 1; 0\}$, то канонический вид квадратичной формы называют *нормальным*.

Задача приведения квадратичной формы к каноническому виду формулируется следующим образом: для данной квадратичной формы требуется найти такую линейную невырожденную замену переменных, при которой квадратичная форма принимает канонический вид.

Однако, надо заметить, что на практике часто бывает достаточно определить только канонический вид, не указывая замены.

Теорема (о приведении квадратичной формы к каноническому виду).

Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторого линейного невырожденного преобразования переменных (невырожденной замены переменных).

Конструктивное доказательство этой теоремы составляет содержание метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

3. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа основан на *последовательном выделении полных квадратов* и заключается в выполнении следующих действий.

1 шаг. Выбрать такую переменную (*ведущую*), которая входит в квадратичную форму во второй степени и, по крайней мере, в одно парное произведение с другой переменной, и перейти на шаг 2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти на шаг 3.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то квадратичная форма имеет канонический вид, и никаких преобразований делать не надо.

2 шаг. По ведущей переменной выделить полный квадрат: собрать в квадратичной форме все члены с ведущей переменной, дополнить сумму до полного квадрата. При этом добавленные члены нужно также и вычесть, чтобы не изменилась сумма. Получим сумму полного квадрата некоторой линейной комбинации переменных и квадратичной формы, в которую уже не входит ведущая переменная. Далее следует продолжить преобразование этой квадратичной формы с шага 1.

3 шаг. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. При этом произведение пары выбранных переменных преобразуется в разность квадратов новых переменных, т.е. в новой квадратичной форме появятся квадратные новых переменных с отличными от нуля коэффициентами. Далее процесс преобразования квадратичной формы продолжается с шага 1.

Итак, идея метода Лагранжа состоит в том, что прием выделения полного квадрата исключает одну переменную из числа ведущих.

✓ Выделение полных квадратов может быть выполнено и с помощью других приемов, а не так, как описано выше. Но, независимо от применяемых приемов преобразования, количество полных квадратов, выделяемых при преобразовании квадратичной формы не должно превышать количество переменных, от которых она зависит.



Пример 1. Привести квадратичную форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3. \quad (1.1)$$

к каноническому виду, используя метод Лагранжа. Найти линейное преобразование.

Решение. В квадратичную форму (1.1) переменная x_1 входит во второй степени и в парное произведение. Выберем ее в качестве ведущей переменной. По ведущей переменной x_1 выделим все слагаемые, которые ее содержат, и сформируем соответствующий полный квадрат:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3 = \\ &= x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 9x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_2x_3 = (x_1 + 3x_2)^2 - 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

В полученной выражении три последних слагаемых образуют квадратичную форму от двух переменных x_2 и x_3 . И для выделения в ней полного квадрата в качестве ведущей переменной выберем x_3 :

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 3x_2)^2 + x_3^2 + 8x_2x_3 - 8x_2^2 = \\ &= (x_1 + 3x_2)^2 + (x_3^2 + 8x_2x_3 + 16x_2^2) - 16x_2^2 - 8x_2^2 = \\ &= (x_1 + 3x_2)^2 + (x_3 + 4x_2)^2 - 24x_2^2. \end{aligned}$$

Введем новые переменные:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = x_3 + 4x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \quad (1.2)$$

В результате получим выражение для квадратичной формы (1.1) в новых переменных:

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 24y_3^2. \quad (1.3)$$

При этом

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = \tilde{Q}(x_1 + 3x_2, x_3 + 4x_2, x_2) = Q(x_1, x_2, x_3).$$

Выразив из (1.2) старые переменные через новые

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_3, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2 - 4y_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

получим матрицу преобразования

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Таким образом, с помощью линейного преобразования $X = BY$ с матрицей (1.4) квадратичная форма (1.1) приводится к каноническому виду (1.3):

$$Q(x_1, x_2, x_3) = Q(y_1 - 3y_3, y_3, y_2 - 4y_3) = \tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 24y_3^2, \\ Q(X) = Q(BY) = \tilde{Q}(Y).$$

Матрицы A и $\tilde{A}$ квадратичной формы в старых (1.1) и в новых (1.3) переменных соответственно имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

При этом должно быть выполнено равенство $\tilde{A} = B^T A B$. Убедимся в этом

$$B^T A B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -24 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \tilde{A} \quad \blacksquare$$



Пример 2. Привести квадратичную форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3. \quad (2.1)$$

к каноническому виду, используя метод Лагранжа. Найти линейное преобразование.

Решение. В данной квадратичной форме отсутствуют квадраты переменных, поэтому, согласно шагу 3 описанного [алгоритма](#), выполним преобразование

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

после которого квадратичная форма примет вид

$$\begin{aligned} Q(y_1 - y_2, y_1 + y_2, y_3) &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 - (y_1 + y_2)y_3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 - 2y_2y_3 = Q_1(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

В полученном выражении выделим полные квадраты:

$$Q_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_2y_3 = y_1^2 - (y_2 + y_3)^2 + y_3^2.$$

Применив преобразование

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 + y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \quad (2.3)$$

получим канонический вид квадратичной формы

$$Q_1(z_1, z_2 - z_3, z_3) = Q_2(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$$

Из равенств (2.3) найдем

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 - z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Подставим выражения для переменных y_1, y_2, y_3 в (2.2), получим иско-
мое преобразование

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + z_3, \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = BZ, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью линейного преобразования с матрицей B за-
данная квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$Q(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{X=BZ} Q(BZ) = Q_3(z) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$$

Проверка. Так как заданной квадратичной форме соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{A} = B^T A B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная матрица соответствует квадратичной форме

$$Q_3(z) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$$

Замечание. Заданная квадратичная форма с помощью двух линейных
преобразований с матрицами B_1 и B_2 последовательно приводится к ка-
ноническому виду

$$Q(x) \xrightarrow[X=B_1Y]{B_1} Q_1(y) \xrightarrow[Y=B_2Z]{B_2} Q_2(z)$$

Перевод заданной квадратичной формы к каноническому виду можно осуществить с помощью одного линейного преобразования с матрицей $B=B_1B_2$:

$$Q(x) \xrightarrow[X=BZ]{B=B_1B_2} Q_2(z)$$

Тогда

$$B = B_1B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$



Пример 3. Привести квадратичную форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2. \quad (3.1)$$

к каноническому виду, используя метод Лагранжа. Найти линейное преобразование.

Решение. Выберем в качестве ведущей переменную x_1 . Выделим все слагаемые, которые ее содержат, и сформируем соответствующий полный квадрат:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 - 2x_2x_3. \end{aligned}$$

Не обращаясь к шагу [3 алгоритма](#), легко установить, что

$$4x_2x_3 = (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2.$$

И, следовательно, для заданной квадратичной формы получим:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2. \quad (3.2)$$

Введем новые переменные:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_2 - x_3. \end{cases} \quad (3.3)$$

В новых переменных квадратичная форма примет вид

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2. \quad (3.4)$$

При этом

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = \tilde{Q}(x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_2 - x_3) = Q(x_1, x_2, x_3).$$

Выразим из (3.3) старые переменные через новые. Так как

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_2 - x_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ где } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad B = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{проверьте!}) \quad (3.5)$$

Таким образом, с помощью линейного преобразования $X = BY$ с матрицей (3.5) квадратичная форма (3.1) приводится к каноническому виду (3.4):

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= Q(y_1 - y_3, \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3, \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3) = \\ &= \tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2. \end{aligned}$$



Зная матрицы A , $\tilde{A}$ квадратичных форм (3.1), (3.4) соответственно и матрицу B (3.5) линейного преобразования $X = BY$, проверьте справедливость равенства $\tilde{A} = B^T A B$.

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с.
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974>
2. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов / М.И. Клиот-Дашинский. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 160 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТ-ЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.