Лекция № 1

Определители 2-го и 3-го порядков

При решении систем линейных уравнений, а также в ряде других задач используются специальные математические выражения, называемые определителями.
Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь коэффициенты a_{ij} при неизвестных x_1 и x_2 имеют два индекса, первый из которых указывает, какому уравнению принадлежит коэффициент, а второй, при каком неизвестном он стоит. Таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы* (1).

Умножая первое уравнение системы (1) на a_{22}, второе на $-a_{12}$ и складывая полученные уравнения, найдем:

$$+\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}\left|\begin{matrix} \times a_{22} \\ \times(-a_{12}) \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы (1) на $-a_{21}$, второе на a_{11} и складывая полученные уравнения, найдем:

$$+\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}\left|\begin{matrix} \times(-a_{21}) \\ \times a_{11} \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$ то система (1) имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{12} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$ то возможны следующие случаи:

1) Если хотя бы одно из чисел $b_1a_{22} - b_2a_{12}$ и $b_2a_{12} - b_1a_{21}$ отлично от нуля, то система (1) решений не имеет;
2) Если оба числа $b_1a_{22} - b_2a_{12}$ и $b_2a_{12} - b_1a_{21}$ равны нулю, то уравнения системы пропорциональны, и система может иметь бесконечно много решений (каждое из которых получается, если одну из неизвестных взять произвольно, а вторую вычислить с помощью любого из уравнений из системы), а может и не иметь решений.

   Например, система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2; \end{cases}$ имеет бесконечно много решений и $x_2 = 1 - x_1$. А система $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 = 1, \end{cases}$ очевидно не имеет решений.

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется *определителем*[1] (*детерминантом*) и обозначаются символами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Об определителе (4) говорят, что он соответствует матрице (2).

Если для матрицы (2) ввести имя $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то соответствующий определитель можно будет обозначить как $|A|$ или $\det A$. Таким образом, для определителя матрицы A по определению имеем:

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.} \tag{5}$$

Этот определитель называют *определителем второго порядка* (по количеству строк и столбцов матрицы A).

С помощью определителей формулы (3) для решения системы уравнений (1) могут быть записаны в виде:

[1] Термин «Определитель» в современном его значении ввел О.Коши (1815).

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

Формулы (6) называют *формулами Крамера*[2].

√ Заметим, что в числителе первой формулы (6) стоит определитель матрицы, которая получена из матрицы A заменой ее первого столбца на столбец из элементов правой части системы (1), а в числителе второй – определитель матрицы, полученной из A заменой ее второго столбца на столбец из элементов правой части системы (1).

Пример 1. *Формулы Крамера*

Найдя для системы $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 4y = 6, \end{cases}$ три определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) = 11,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 6 \cdot (-3) = 22,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = 11,$$

применив формулы (6), получим ее решение:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1.$$

---

[2] **КРАМЕР** Габриель (Cramer Gabriel) (31.07.1704, Женева,– 4.01.1752, Баньоль, близ Нима, Франция) – швейцарский математик. Установив и опубликовав в 1750 г. правило решения систем линейных уравнений с буквенными коэффициентами (правило Крамера), Крамер заложил основы теории определителей. (Математика. Большой энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М., 2000. С. 705.)

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{7}$$

Таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

составленная из коэффициентов a_{ij} при неизвестных, называется матрицей системы (7).

Выполним последовательно следующие преобразования системы (7). Умножим первое уравнение на a_{22} и вычтем из него второе, умноженное на a_{i2}. Второе уравнение системы умножим на a_{32} и вычтем из него третье, умноженное на a_{22}. И, наконец, из третьего уравнения системы (7), умноженного на a_{12}, вычтем первое, умноженное на a_{32}. В результате получим следующие три уравнения:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 + (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})x_3 = c_1, \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})x_1 + (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})x_3 = c_2, \\ (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})x_3 = c_3, \end{cases} \tag{9}$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые числа, определяемые через коэффициенты a_{ij} и b_i из системы (7).

Умножим уравнения системы (9) соответственно на a_{33}, a_{13}, a_{23} и сложим их почленно. В результате получим

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = c,$$

где c – некоторое число.

Коэффициент, стоящий в полученном равенстве при x_1, обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

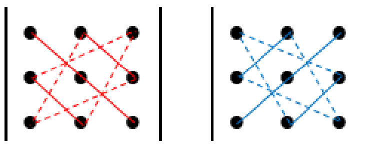
И называется *определителем третьего порядка*, соответствующим матрице (8).

Итак, определитель третьего порядка (10) есть величина, полученная по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (11)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания формулы (11) удобно пользоваться правилом Саррю-са[3], или правилом треугольника, которое может быть представлено следующей схемой. Это правило поясняет, как формируются отдельные слагаемые в (11), и указывает, с какими знаками их следует брать:



\+ –

Пример 2. *Правило треугольника*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot(-3)\cdot 0 + 4\cdot(-2)\cdot(-1) - 4\cdot 2\cdot(-3) -$$

$$-1\cdot(-1)\cdot 0 - 3\cdot(-2)\cdot 3 = 56.$$

[3] **САРРЮС** (Frédéric Pierre Sarrus, 1798—1858) — французский математик, профессор в Страсбурге. Правило вычисления определителя третьего порядка опубликовано в «Les Elements d'Algebre» Финка, 1846 г. (Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник.- М.: Издательство ЛКИ, 2018. С.42.)

Объединяя в формуле (11) справа члены, содержащие элементы a_{11}, a_{12}, a_{13}, и используя формулу для определителя 2-го порядка, выражение для определителя 3-го порядка можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Формула (12) представляет собой разложение определителя 3-го порядка по элементам первой строки. Каждый определитель, входящий в разложение, является определителем 2-го порядка для матрицы, получаемой из исходной (8) вычеркиванием первой строки и столбца, соответствующего номеру слагаемого в разложении.

√ Заметим, что определитель может быть разложен по элементам любой строки и любого столбца. Общее правило построения такого разложения будет рассмотрено позже.

Пример 3. *Разложение по элементам 1-ой строки*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 6 + 2(9+4) - 3\cdot(0-8) = 56.$$

Определители 2-го и 3-го порядка имеют ряд общих свойств. В их справедливости можно убедиться, используя формулы (5) и (11).

1°. *Величина определителя не меняется при замене каждой строки столбцом с тем же номером.*

√ Из этого свойства вытекает, что строки и столбцы определителя равноправны. Поэтому любое свойство, рассмотренное далее, окажется справедливым и для столбцов.

Замена каждой строки определителя его столбцом с тем же номером называется *транспонированием определителя*.

2°. *Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то у него изменится только знак, а абсолютная величина останется прежней.*

Докажите справедливость свойств 1° и 2° для определителя 2-го порядка.

3°. *Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.*

Действительно, так как строки определителя одинаковы, то, очевидно, их перестановка не изменяет определитель. С другой стороны, согласно свойству 2°, при перестановке строк изменится знак определителя. Следовательно, обозначая величину определителя через Δ, имеем $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$.

4°. *Если все элементы строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.*

Из свойств 3° и 4° следует следующее свойство.

5°. *Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.*

6°. *Если каждый элемент строки (столбца) является суммой двух слагаемых, то определитель равен сумме определителей, в которых элементы этой строки (столбца) заменены отдельными слагаемыми. В частности, для определителя 2-го порядка это свойство можно записать следующим образом:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

√ Это свойство справедливо для любого числа слагаемых, т.е.

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{N} b_k & \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{vmatrix} b_k & c_k \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7°. *Величина определителя не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умножив их предварительно на одно и то же число.*

Свойство 7° является следствием свойств 6° и 5°. Приведем доказательство для частного случая:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{6^o}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\substack{5^o \\ =0}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Докажите справедливость следующих равенств:

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Пример 3. *Разложение определителя (10) по элементам последней строки*

Представив элементы в последней строке следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+0+0 & 0+a_{32}+0 & 0+0+a_{33} \end{vmatrix},$$

после применения свойства 4°, будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Меняя порядок столбцов в первом и втором определителе, применив свойство 2°, получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ 0 & 0 & a_{31} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ 0 & 0 & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

К полученным определителям применим формулу (13). В результате получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример 4. *Вычисление определителя*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Согласно свойству 7°, если ко второй строке определителя прибавить первую, то значение определителя не изменится. Поэтому, выполнив это действие, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Умножив вторую строку определителя справа на (-1) и сложив с последней строкой, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Сложив первый столбец с последним, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Осталось применить, например, формулу (13):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 8 = 56.$$

Рекомендуемая литература

1. Ильин В. А. Линейная алгебра: учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука, 1984. – 296 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974
2. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 304 с.
3. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Наука, 1975. – 400 с. URL: https://bookree.org/reader?file=566831
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие / И. В. Проскуряков. – Изд. 8-е. – Москва : ФИЗМАТЛИТ ; Санкт-Петербург : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 384 с.: URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/560.pdf