# ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Известно множество способов представления чисел. В любом случае число изображается символом или группой символов (словом) некоторого алфавита. Будем называть такие символы *цифрами*, символические изображения чисел - *кодами*, а правила их получения - *системами счисления* (кодирования).

Простейшая и самая древняя система счисления использует для записи любых чисел всего один символ (рис. 1). Длина записи числа при таком кодировании прямо связана с его величиной, что роднит этот способ с геометрическим представлением чисел в виде отрезков.

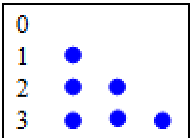
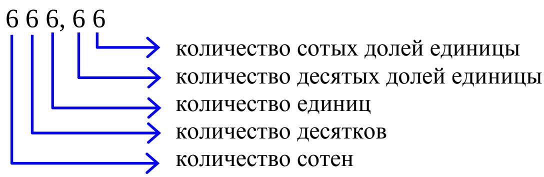


Рис. 1

Системой счисления, которой мы пользуемся ежедневно, является *десятичная* система счисления. Любое число в ней представляется с помощью набора цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Причем очень важно, что значение каждой цифры в записи числа зависит от того места, на котором она стоит. Так, например, в записи 666,66 цифра 6 встречается 5 раз, но в каждой позиции она имеет разный смысл:




Формально все это можно представить следующим образом

$$666{,}66 = 6\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0 + 6\cdot 10^{-1} + 6\cdot 10^{-2}.$$

Мы видим, что это выражение определяет значение каждой позиции в записи числа. Подобным образом можно представить любое десятичное число. Символическая запись

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$$

расшифровывается так

$$a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots + a_{-m} \cdot 10^{-m}.$$

Отсюда видно, что цифры в записи любого числа есть не что иное, как коэффициенты в разложении этого числа по степеням десяти. Каждый символ $a_i$ есть одна из десятичных цифр. Значение позиции любого символа зависит от его расположения в записи числа. Поэтому десятичная система счисления относится к *позиционным системам счисления*.

В десятичной системе счисления используют десять различных цифр. Само число 10 называют *основанием* десятичной системы счисления, набор цифр {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} - ее *базисом*, а сами цифры *базисными*.

Итак, подчеркнем, что представление чисел в десятичной системе счисления основано на том, что любое число можно разложить по степеням числа 10, где каждый из коэффициентов в разложении – одно из базисных чисел этой системы. Последовательность этих коэффициентов и есть запись числа в десятичной системе счисления. Но ведь можно разлагать числа по степеням и любого другого целого числа.

В качестве основания позиционной системы счисления можно взять любое целое число $p>1$, а для базисной системы использовать набор из $p$ различных цифр $\{0,1,2,3,...,p–1\}$. Заметим, что число цифр в базисном наборе совпадает с основанием системы счисления. В системе счисления с произвольным основанием $p$ запись

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}, \quad \text{где} \quad a_i \in \{0,1,2,..., p-1\},\ i \in Z,$$

соответствует десятичному числу, которое находится как

$$a_n \cdot p^n + \ldots + a_1 \cdot p + a_0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \ldots + a_{-m} \cdot p^{-m}$$

по правилам обычной (десятичной) арифметики.

Например,

$$123_8 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 83, \quad 1010_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 = 10,$$

$$102{,}1_4 = 1\cdot 4^2 + 2\cdot 4^0 + 1\cdot 4^{-1} = 18{,}25,$$

где нижние индексы в записи чисел означают используемую систему счисления.

Минимальным значением основания системы счисления $p$>1 является число 2. В *двоичной системе* базисная система содержит две цифры 0 и 1:

$$110011{,}1_2=51{,}5_{10}.$$

В случае *восьмеричной* системы счисления основанием системы служит число 8, а базис системы составляет набор цифр {0,1,2,3,4,5,6,7}:

$$765{,}4_8=7\cdot8^2+6\cdot8^1+5\cdot8^0+4\cdot8^{-1}=501{,}5_{10}.$$

При записи чисел в *шестнадцатиричной* системе необходимо использовать 16 цифр. Только десять цифр из шестнадцати имеют общепринятое обозначения 0-9, для записи остальных используют символы A, B, C, D, E, F:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| «10» | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| «16» | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |

Например,

$$3AF_{16} = 3\cdot16^2 + 10\cdot16^1 + 15\cdot16^0 = 768_{10} + 160_{10} + 15_{10}= 943_{10}.$$

## Арифметические операции над числами в недесятичных системах счисления

Арифметические операции над числами в недесятичных системах счисления производятся по тем же правилам, что и над обычными десятичными числами. Наиболее просто вычисления выполняются в двоичной системе счисления. При этом пользуются соответствующими таблицами:

Таблица сложения

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 10 |

Таблица вычитания

| - | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | -1 | 0 |

Таблица умножения

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Легко построить и затем использовать аналогичные таблицы и для других систем счисления. Главное - помнить, что перенос в следующий разряд возникает тогда, когда результат действия над двумя цифрами равен или больше основания.

Так, например, таблицы сложения и умножения в восьмеричной системе имеют вид:

Таблица сложения

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Таблица умножения

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 11 | 14 | 17 | 22 | 25 |
| 4 | 0 | 4 | 10 | 14 | 20 | 24 | 30 | 34 |
| 5 | 0 | 5 | 12 | 17 | 24 | 31 | 36 | 43 |
| 6 | 0 | 6 | 14 | 22 | 30 | 36 | 44 | 52 |
| 7 | 0 | 7 | 16 | 25 | 34 | 43 | 52 | 61 |

**Задание 1**. Заполните таблицы сложения и умножения в троичной системе счисления (p = 3):

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

## Примеры выполнения арифметических операций

Приведем несколько примеров арифметических действий в различных системах счисления.

1) В двоичной системе счисления:

$$
\begin{array}{r}
+\;10101{,}01 \\
\underline{1011{,}1\phantom{0}} \\
100000{,}11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\;10101 \\
\underline{1011} \\
10101 \\
10101\phantom{0} \\
\underline{10101\phantom{000}} \\
11100111
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\;110001 \\
\underline{111} \\
101010
\end{array}
$$

2) В восьмеричной системе счисления:

$$
\begin{array}{r}
+\ 364 \\
525 \\
\hline
1111
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\ 525 \\
364 \\
\hline
141
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\ 364 \\
\underline{525} \\
2304 \\
+\ \ 750\phantom{0} \\
\underline{2304\phantom{00}.} \\
242404
\end{array}
$$

Убедиться в правильности выполненных операций можно путем перевода исходных чисел и результатов в десятичную систему. Например, так

$$364_8 = 3 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 8^0 = 192 + 48 + 4 = 244_{10},$$

$$525_8 = 5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 8^0 = 320 + 16 + 5 = 341_{10},$$

$$1111_8 = 1 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8^0 = 512 + 64 + 8 + 1 = 585_{10}$$

---

$$244 + 341 = 585.$$

3) В шестнадцатиричной системе:

$$
\begin{array}{r}
+\ \ 15A03{,}2 \\
B127{,}C \\
\hline
20B2A{,}E
\end{array}
$$

**Задание 2.** Проверьте правильность операций в приведенных выше примерах.

**Задание 3.** Выполните указанные ниже действия в троичной системе (р = 3):

$$
\begin{array}{r}
+\ \ 1201{,}21 \\
212{,}02 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\ \ 2101{,}2 \\
210{,}1 \\
\hline
\end{array}
$$

## Перевод чисел из одной системы счисления в другую

**1. Перевод чисел в десятичную систему счисления.** Чтобы перевести число $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} ... a_{-m}$, записанное в системе счисления с основанием p, в десятичную систему счисления, надо найти значение выражения:

$$N = a_n \cdot p^n + \ldots + a_1 \cdot p + a_0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \ldots + a_{-m} \cdot p^{-m}$$

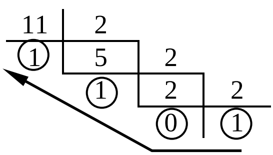
**Задание 4.** Переведите числа в десятичную систему счисления:

| | | |
|---|---|---|
| $10001{,}01_2$ | $3670_8$ | $A{,}2C_{16}$ |

**2.1. Перевод целых чисел из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием p** осуществляют *методом деления*, в ходе которого нужно выписать остатки от последовательного деления десятичного числа на величину основания p и прочитать их, начиная с последнего.

### Примеры

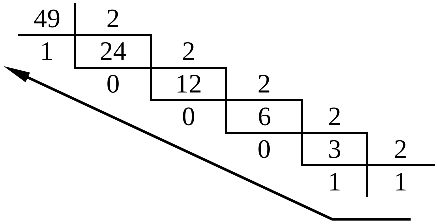
1) Перевести число $11_{10}$ в двоичную систему. Перевод удобно представить в виде схемы:




и записать ответ, собирая остатки от последовательного, деления в направлении, указанном стрелкой. В результате получим

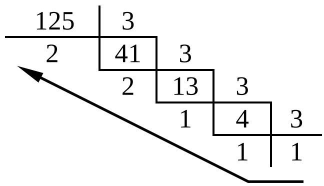
$$11_{10}=1011_2$$

2) Перевести число $49_{10}$ в двоичную систему счисления.



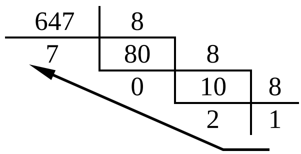

$49_{10}=110001_2$

3) Перевести число $125_{10}$ в систему счисления с основанием $p=3$.




$125_{10}=11122_3$.

4) Перевести число $647_{10}$ в систему счисления с основанием $p=8$.




$647_{10}=1207_8$.

**Задание 5.** Переведите числа из десятичной системы счисления в систему счисления с указанным основанием р:

| | | |
|---|---|---|
| $45_{10} \to p = 2$ | $217_{10} \to p = 8$ | $376_{10} \to p = 16$ |

**2.2. Перевод дробных чисел из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием р** осуществляют *методом умножения*. При этом исходную дробь умножают на величину р. Целая часть результата представляет первую цифру после запятой искомой дроби. Дробная часть результата снова умножается на р и т.д.

## Примеры

1) Перевести число $0{,}5625_{10}$ в двоичную систему счисления.

| | |
|---|---|
| 0, | 5625<br>2 |
| 1 | 1250<br>2 |
| 0 | 2500<br>2 |
| 0 | 5000<br>2 |
| 1 | 0000 |

Вычисления удобно представить в виде схемы. Выписав цифры, стоящие слева от вертикальной черты в последовательности, определяемой стрелкой, получим

$0{,}5625_{10}=0{,}1001_2$.

2) Перевести в двоичную систему счисления число $0{,}7_{10}$:

| | |
|---|---|
| 0, | 7<br>2 |
| 1 | 4<br>2 |
| 0 | 8<br>2 |
| 1 | 6<br>2 |
| 1 | 2<br>2 |
| 0 | 4<br>2 |
| 0 | 8<br>2 |
| 1 | 6<br>2 |
| 1 | 2 |

.....

Очевидно, что процесс перевода числа $0{,}7_{10}$ может продолжаться бесконечно, давая все новые и новые знаки в его изображении в двоичной системе. Такой бесконечный процесс обрывают на некотором шаге, определяемом требуемой точностью представления числа. Например,

$$0{,}7_{10}=(0{,}1011001....)_2$$

3) Перевести число $0{,}124_{10}$ в пятиричную систему счисления.

| | |
|---|---|
| 0, | 124 |
| | 5 |
| 0 | 620 |
| | 5 |
| 3 | 100 |
| | 5 |
| 0 | 500 |
| | 5 |
| 2 | 500 |
| | 5 |
| 2 | 500 |
| … | ….. |

$$0{,}124_{10}=(0{,}03022......)_5.$$

В последних двух примерах полученные в новой системе дроби содержат повторяющиеся группы цифр. Напомним, что дроби, в которых одна и та же группа цифр, начиная с некоторого места, повторяется бесконечно много раз, называются периодическими, а сама повторяющаяся группа цифр называется *периодом* дроби. Группа цифр, предшествующая периоду, называется *предпериодом*. Так, в примере 2 получена дробь, период которой образует группа цифр 1100, а предпериод - 10. В записи дроби период заключают в скобки. Так, например, для числа из примера 2) имеем:

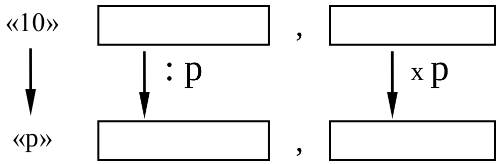
$$0{,}7_{10}=0{,}10(1100)_2$$

Заметим, что при переводе любой дроби из десятичной системы счисления в любую другую всегда получается либо конечная, либо периодическая дробь.

**Задание 6.** Проверьте правильность перевода следующих дробей:

$0{,}55_{10}=0{,}2(3)_5$, $0{,}3875_{10}=0{,}12(03)_4$, $0{,}45_{10}=0{,}24(1)_6$.

**2.3. Перевод чисел, содержащих целую и дробные части**, осуществляется в два этапа. Отдельно переводится целая часть, отдельно - дробная. В итоговой записи полученного числа, как обычно, целая часть отделяется от дробной запятой. Представленная ниже схема дает наглядную интерпретацию правилу:

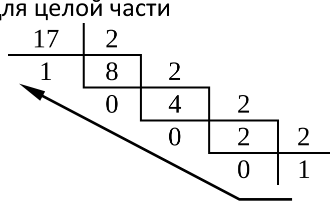



*Замечание.* На схеме символы «10» и «p» указывают на основания систем счисления.

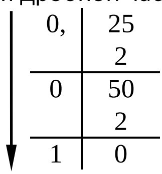
## Примеры

1) Перевести число $17{,}25_{10}$ в двоичную систему счисления.

Для целой части




Для дробной части



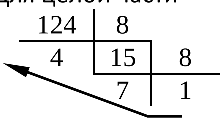

$17_{10}=10001_2$.

$0{,}25_{10}=0{,}01_2$

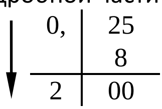
Таким образом, получили $17{,}25_{10}=10001{,}01_2$.

2) Перевести число $124{,}25_{10}$ в восьмеричную систему счисления.

Для целой части




Для дробной части




$124_{10}=174_8$

$0{,}25_{10}=0{,}2_8$

Таким образом, получили $124{,}25_{10} = 174{,}2_8$.

**Задание 7.** Переведите числа из десятичной системы счисления в систему счисления с указанным основанием р:

| | |
|---|---|
| $45{,}125_{10} \rightarrow p = 2$ | $217{,}125_{10} \rightarrow p = 8$ |

**3. Перевод чисел из 8-ричной и 16-ричной систем в двоичную** осуществляется заменой восьмеричных цифр *триадами* (группа из трех двоичных цифр), а шестнадцатиричных цифр – *тетрадами* (группа из четырех двоичных цифр).

**Примеры**

$$367{,}25_8 = \underbrace{011}_{3}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{7},\underbrace{010}_{2}\underbrace{101}_{5} = 11110111{,}010101_2;$$

$$B1{,}C7_{16} = \underbrace{1011}_{B}\underbrace{0001}_{1},\underbrace{1100}_{C}\underbrace{0111}_{7} = 10110001{,}11000111_2.$$

**Задание 8.** Выполните перевод чисел в двоичную систему счисления:

| | |
|---|---|
| $245{,}13_8$ | $A2{,}1B_{16}$ |

**4. Перевод чисел из двоичной в 8-ричную и 16-ричную системы счисления** осуществляется заменой триад восьмеричными цифрами, а тетрад - шестнадцатиричными.

Разбиение на триады/тетрады для целой части начинается от десятичной запятой влево, для дробной – вправо. Число дополняется нулями справа и слева для формирования крайних, не состоящих только из нулей групп.

## Примеры

дополнение

$$1101100011011{,}101101_2 = \underbrace{0001}_{1}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0001}_{1}\underbrace{1011}_{B},\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0100}_{4} = 1B1B,B4_{16};$$

$$1101100011011{,}101101_2 = \underbrace{001}_{1}\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}\underbrace{011}_{3}\underbrace{011}_{3},\underbrace{101}_{5}\underbrace{101}_{5} = 15433{,}55_8.$$

**Задание 9.** Переведите число $10111010110{,}01101_2$ в 8-ричную и 16-ричную системы счисления.

## 5. Косвенные правила перевода

**5.1. Перевод чисел из двоичной в 10-тичную систему счисления** удобно выполнить в два этапа: во-первых, перевести число из системы «2» в систему «8» или «16» по правилу 4 и, во-вторых, перевести полученное число в систему «10» по правилу 1.

## Примеры

1) через систему «8»:

$$\underbrace{001}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{101}_{5}\underbrace{111}_{7}\underbrace{001}_{1}\underbrace{101}_{5} =$$

$$= 1\cdot 8^5 + 2\cdot 8^4 + 5\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0 =$$

$$= 32768_{10} + 8192_{10} + 2560_{10} + 448_{10} + 8_{10} + 5_{10} = 43981_{10};$$

2) через систему «16»

$$\underbrace{1010}_{A}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{1100}_{C}\underbrace{1101}_{D} =$$

$$= 10\cdot 16^3 + 11\cdot 16^2 + 12\cdot 16^1 + 13\cdot 16^0 =$$

$$= 40960_{10} + 2816_{10} + 192_{10} + 13_{10} = 43981_{10};$$

**Задание 10.** Переведите число $1011101011001101_2$ в десятичную систему счисления.

**5.2. Перевод чисел из десятичной в двоичную систему** выполняется в два этапа: во-первых, следует перевести число из системы «10» в систему «8» или «16» по правилу 2, и, во-вторых, – перевести полученное число в систему «2» по правилу 3.

**Примеры**

1) через систему «16»: $1976_{10} \rightarrow N_2$

$$\begin{array}{r|r|l} 1976 & 16 & \\ \hline 8 & 123 & 16 \\ \cline{2-3} & 11 & 7 \end{array}$$

$1976_{10}=7B8_{16}$.

$$7B8_{16} = \underbrace{0111}_{7}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{1000}_{8}{}_2 = 11110111000_2$$

2) через систему «8»: $1976_{10} \rightarrow N_2$

$$\begin{array}{r|r|r|l} 1976 & 8 & & \\ \hline 0 & 247 & 8 & \\ \cline{2-3} & 7 & 30 & 8 \\ \cline{3-4} & & 6 & 3 \end{array}$$

$1976_{10}=3670_8$.

$$3670_8 = \underbrace{011}_{3}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{7}\underbrace{000}_{0}{}_2 = 11110111000_2$$

**Задание 11.** Переведите число $2014_{10}$ в двоичную систему счисления.

**5.3. Перевод чисел из 8-ричной в 16-ричную систему и из 16-ричной в 8-ричную** удобно выполнять так: перевести число из заданной системы в двоичную систему (правило 3) и затем в требуемую (правило 4).

### Примеры

1)

$$734{,}56_8 = \underbrace{111}_{7}\underbrace{011}_{3}\underbrace{100}_{4},\underbrace{101}_{5}\underbrace{110_2}_{6} = 111011100{,}10111_2 =$$

$$= \underbrace{0001}_{1}\underbrace{1101}_{D}\underbrace{1100}_{C},\underbrace{1011}_{B}\underbrace{1000_2}_{8} = 1DC{,}B8_{16}$$

$734{,}56_8 = 1DC{,}B8_{16}$.

2)

$$A56{,}B3_{16} = \underbrace{1010}_{A}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{0110}_{6},\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0011_2}_{3} =$$

$$= 101001010110{,}10110011_2 =$$

$$= \underbrace{101}_{5}\underbrace{001}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{110}_{6},\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}\underbrace{110_2}_{6} = 5126{,}546_8$$

$A56{,}B3_{16} = 5126{,}546_8$.

**Задание 12.** Переведите числа в систему счисления с указанным основанием p:

| | |
|---|---|
| $125{,}37_8 \rightarrow p = 16$ | $C21{,}D1_{16} \rightarrow p = 8$ |

**6. Перевод периодических дробей из недесятичных систем в десятичную систему.** Перевод периодических дробей из недесятичных систем счисления в десятичную осуществляется с использованием формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

### Примеры

1). Перевести дробь $0{,}2(1)_4$ в десятичную систему.

Согласно общему правилу перевода,

$$0{,}2(1)_4 = \frac{2}{4} + \left( \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \ldots \right) = \frac{1}{2} + \frac{1/4^2}{1 - 1/4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} =$$

$$= 0{,}58(3)_{10}.$$

2). Перевести дробь $0{,}B(3C)_{16}$ в десятичную систему.

$$0{,}B(3C)_{16} = \frac{11}{16} + \frac{3}{16^2} + \frac{12}{16^3} + \frac{3}{16^4} + \frac{12}{16^5} + \ldots =$$

$$= \frac{11}{16} + \left( \frac{3}{16^2} + \frac{3}{16^4} + \ldots \right) + \left( \frac{12}{16^3} + \frac{12}{16^5} + \ldots \right) =$$

$$= \frac{11}{16} + \frac{3/16^2}{1 - 1/16^2} + \frac{12/16^3}{1 - 1/16^2} = \frac{11}{16} + \frac{3}{15 \cdot 17} + \frac{12}{15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{191}{272}.$$

**Задание 13.** Переведите число $0{,}54(6)_7$ в десятичную систему счисления.