Интегрирование уравнения в полных дифференциалах

$$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0 \qquad (1)$$

Уравнение (1) области *D* является уравнением в полных дифференциалах, если

$$\frac{d}{dy}P(x,y) = \frac{d}{dx}Q(x,y) \qquad \text{в D.}$$

Пример (№ 186, Сб. задач [Филиппов])

Пусть $P(x,y) := 2x\cdot y$ $\qquad Q(x,y) := x^2 - y^2$

Найти решение уравнения:

$$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0 \rightarrow dy\cdot\left(x^2 - y^2\right) + 2\cdot dx\cdot x\cdot y = 0 \qquad (2)$$

Решение:

$\frac{d}{dy}P(x,y) \rightarrow 2\cdot x$ $\qquad \frac{d}{dx}Q(x,y) \rightarrow 2\cdot x$

Так как $\frac{d}{dy}P(x,y) = \frac{d}{dx}Q(x,y) \rightarrow 1$

то уравнение (2) является уравнением **в полных дифференциалах.**

Найдем функцию, полный дифференциал которой совпадает с левой частью уравнения (2), решив следующую систему уравнений:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{d}{dx}u(x,y) = P(x,y) \\ \frac{d}{dy}u(x,y) = Q(x,y) \end{array}\right. \qquad (3)$$

Интегрируя первое уравнение системы (3), найдем:

$$u(x,y) := \int P(x,y)\,dx + \psi(y) \rightarrow y\cdot x^2 + \psi(y) \qquad (4)$$

Здесь функция пока произвольная, но она подлежит определению.

Полученное выражение для $u(x,y)$ подставим во второе уравнение системы (3):

$$\frac{d}{dy}u(x,y) = Q(x,y) \rightarrow x^2 + \frac{d}{dy}\psi(y) = x^2 - y^2$$

Отсюда получим выражение для производной $\frac{d}{dy}\psi(y)$

$$D\psi := x^2 + \frac{d}{dy}\psi(y) = x^2 - y^2 \text{ substitute}, \frac{d}{dy}\psi(y) = d\psi \rightarrow \text{ solve}, d\psi \rightarrow -y^2$$

Интегрируя полученное выражение:

$$\Psi := \int D\psi\,dy + c \rightarrow c - \frac{y^3}{3}$$

найдем $\psi(y) = \Psi \rightarrow \psi(y) = c - \frac{y^3}{3}$

Подставляя полученное выражение в (4), найдем функцию $u(x,y)$:

$$u(x,y) := u(x,y) \text{ substitute}, \psi(y) = \Psi \;\rightarrow x^2 \cdot y - \frac{y^3}{3} + c$$

Общее решение уравнения (2) запишем в виде:

$$S := u(x,y) = C \text{ assume}, c = 0 \;\rightarrow x^2 \cdot y - \frac{y^3}{3} = C$$

Ответ: $S \rightarrow x^2 \cdot y - \frac{y^3}{3} = C$

Интегральные кривые уравнения (2)

$f(y,C) := \sqrt{\frac{3C + y^3}{y}}$ $\qquad N := 15 \qquad i := 1..N \qquad C_i := -10 + (i-1) \cdot 2$

$a := -5 \qquad b := 5 \qquad y := a, a + 0.003 .. b$