Решение систем дифференциальных уравнений X'(t)=AX+F

Задание 1

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 15 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A и соответствующие собственные вектора:

$$\lambda := \mathrm{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad V := \mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Построим фундаментальную систему решений:

$$h_1 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_0) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_1(t) := e^{\lambda_0 \cdot t} \cdot h_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -e^{6 \cdot t} \\ -3 \cdot e^{6 \cdot t} \\ e^{6 \cdot t} \end{pmatrix}$$

$$h_2 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2(t) := e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot h_2 \cdot 5 \rightarrow \begin{pmatrix} -e^{-3 \cdot t} \\ 5 \cdot e^{-3 \cdot t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3 := V^{\langle 1 \rangle} \qquad X_3(t) := e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot 5 \cdot h_3 \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-3 \cdot t} \\ 0 \\ 5 \cdot e^{-3 \cdot t} \end{pmatrix}$$

Общее решение уравнения: $X(t) := C_1 \cdot X_1(t) + C_2 \cdot X_2(t) + C_3 \cdot X_3(t)$

Ответ:

$$X(t) \rightarrow \begin{pmatrix} C_3 \cdot e^{-3 \cdot t} - C_2 \cdot e^{-3 \cdot t} - C_1 \cdot e^{6 \cdot t} \\ 5 \cdot C_2 \cdot e^{-3 \cdot t} - 3 \cdot C_1 \cdot e^{6 \cdot t} \\ 5 \cdot C_3 \cdot e^{-3 \cdot t} + C_1 \cdot e^{6 \cdot t} \end{pmatrix}$$

Проверка: $\frac{d}{dt} X(t) = A \cdot X(t) \text{ simplify } \rightarrow 1$

Задание 2

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A и соответствующие собственные вектора:

$\lambda := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad V := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$h_1 := \text{eigenvec}(A, \lambda_0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad X_1(t) := e^{\lambda_0 \cdot t} \cdot h_1 \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2 \cdot t} \\ 4 \cdot e^{2 \cdot t} \\ e^{2 \cdot t} \end{pmatrix}$

$$h_2 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_1) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_2(t) := e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot h_2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \cdot e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Кратному собственному значению соответствует система линейно независимых векторов из одного вектора.

Решение, соответствующее кратному (k=2) собственному значению, будем искать в виде:

$$X_2(t) := \begin{pmatrix} a_1 \cdot t + b_1 \\ a_2 \cdot t + b_2 \\ a_3 \cdot t + b_3 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

Составим условия для определения коэффициентов (применим метод неопределенных коэффициентов)

$$S(t) := e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot \left(\frac{d}{dt} X_2(t) - A \cdot X_2(t) \right) \text{ simplify } \to \begin{pmatrix} a_1 - b_2 + 3 \cdot b_3 - a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t \\ a_2 - 3 \cdot b_1 - b_2 + 3 \cdot b_3 - 3 \cdot a_1 \cdot t - a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t \\ a_3 - b_1 - a_1 \cdot t \end{pmatrix}$$

$$S0 := S(0) \to \begin{pmatrix} a_1 - b_2 + 3 \cdot b_3 \\ a_2 - 3 \cdot b_1 - b_2 + 3 \cdot b_3 \\ a_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$St := S(1) - S(0) \text{ simplify } \to \begin{pmatrix} 3 \cdot a_3 - a_2 \\ 3 \cdot a_3 - a_2 - 3 \cdot a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

$$M := \mathrm{stack}(S0, St) \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 - b_2 + 3\cdot b_3 \\ a_2 - 3\cdot b_1 - b_2 + 3\cdot b_3 \\ a_3 - b_1 \\ 3\cdot a_3 - a_2 \\ 3\cdot a_3 - a_2 - 3\cdot a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

Решим систему линейных уравнений $M\cdot K = 0$

Количество произвольных коэффициентов совпадает с кратностью собственного значения.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_2 \end{pmatrix} := M \left| \begin{array}{l} \mathrm{solve}, a_1, a_2, a_3, b_2 \\ \mathrm{substitute}, b_1 = C_2 \\ \mathrm{substitute}, b_3 = C_3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3\cdot C_2 & C_2 & 3\cdot C_3 \end{pmatrix}$$

$a_1 \rightarrow 0$ $\quad a_2 \rightarrow 3\cdot C_2$ $\quad a_3 \rightarrow C_2$ $\quad b_2 \rightarrow 3\cdot C_3$

$b_1 := C_2$ $\quad b_3 := C_3$

$$X_2(t) := \begin{pmatrix} a_1\cdot t + b_1 \\ a_2\cdot t + b_2 \\ a_3\cdot t + b_3 \end{pmatrix}\cdot e^t \rightarrow \begin{bmatrix} C_2\cdot e^t \\ e^t\cdot(3\cdot C_3 + 3\cdot C_2\cdot t) \\ e^t\cdot(C_3 + C_2\cdot t) \end{bmatrix}$$

Общее решение уравнения: $X(t) := C_1\cdot X_1(t) + X_2(t)$

Ответ:

$$X(t) \to \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{2 \cdot t} + C_2 \cdot e^{t} \\ 4 \cdot C_1 \cdot e^{2 \cdot t} + e^{t} \cdot (3 \cdot C_3 + 3 \cdot C_2 \cdot t) \\ C_1 \cdot e^{2 \cdot t} + e^{t} \cdot (C_3 + C_2 \cdot t) \end{bmatrix}$$

Проверка: $\frac{d}{dt} X(t) = A \cdot X(t) \text{ simplify } \to 1$

Задание 3 $\lambda := \lambda$

$$A := \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 22 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad F(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 := \text{eigenvec}(A, \lambda_0) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h_1 := 10 \cdot h_1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$h_2 := \text{eigenvec}(A, \lambda_1) \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_3 := \mathrm{eigenvec}(A, \lambda_2) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h_3 := h_3 \cdot 14 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$X1 := e^{\lambda_0 \cdot t} \cdot h_1 \qquad X2 := e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot h_2 \qquad X3 := e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot h_3$$

Фундаментальная матрица:

$$W(t) := \mathrm{augment}(X1, X2, X3) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2 \cdot t} & 0 & -1 \\ -16 \cdot e^{2 \cdot t} & -e^{t} & -10 \\ 10 \cdot e^{2 \cdot t} & e^{t} & 14 \end{pmatrix} \qquad |W(t)| \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot e^{3 \cdot t}$$

Общее решение построим с помощью формулы Коши:

$$X(t) := W(t) \cdot \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \int_0^t W(s)^{-1} \cdot F(s)\, ds \right]$$

$$X(t) \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot \sin(t)}{5} - \frac{3 \cdot \cos(t)}{5} - C_3 + e^{2 \cdot t} \cdot \left(C_1 - \frac{2}{5}\right) + 1 \\ \frac{13 \cdot \cos(t)}{5} - 10 \cdot C_3 + \frac{36 \cdot \sin(t)}{5} - e^{t} \cdot (C_2 + 19) - e^{2 \cdot t} \cdot \left(16 \cdot C_1 - \frac{32}{5}\right) + 10 \\ 14 \cdot C_3 - \cos(t) - 11 \cdot \sin(t) + e^{t} \cdot (C_2 + 19) + e^{2 \cdot t} \cdot (10 \cdot C_1 - 4) - 14 \end{bmatrix}$$

Поиск частного решения по виду правой части:

$$H(t) := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \sin(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \cdot \cos(t)$$

$$H(t) := \frac{d}{dt}H(t) - (A \cdot H(t) + F(t)) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \cdot \cos(t) + 4 \cdot A_1 \cdot \sin(t) + A_2 \cdot \sin(t) + A_3 \cdot \sin(t) + 4 \cdot B_1 \cdot \cos(t) + B_2 \cdot \cos(t) + B_3 \cdot \cos(t) - B_1 \cdot \sin(t) \\ A_2 \cdot \cos(t) - \cos(t) - 2 \cdot A_1 \cdot \sin(t) - 4 \cdot A_2 \cdot \sin(t) - 3 \cdot A_3 \cdot \sin(t) - 2 \cdot B_1 \cdot \cos(t) - 4 \cdot B_2 \cdot \cos(t) - 3 \cdot B_3 \cdot \cos(t) - B_2 \cdot \sin(t) \\ A_3 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \sin(t) - 22 \cdot A_1 \cdot \sin(t) - 2 \cdot A_2 \cdot \sin(t) - 3 \cdot A_3 \cdot \sin(t) - 22 \cdot B_1 \cdot \cos(t) - 2 \cdot B_2 \cdot \cos(t) - 3 \cdot B_3 \cdot \cos(t) - B_3 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$Kcos := H(0) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 + 4 \cdot B_1 + B_2 + B_3 \\ A_2 - 2 \cdot B_1 - 4 \cdot B_2 - 3 \cdot B_3 - 1 \\ A_3 - 22 \cdot B_1 - 2 \cdot B_2 - 3 \cdot B_3 \end{pmatrix}$$

$$Ksin := H\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \cdot A_1 + A_2 + A_3 - B_1 \\ -2 \cdot A_1 - 4 \cdot A_2 - 3 \cdot A_3 - B_2 \\ -22 \cdot A_1 - 2 \cdot A_2 - 3 \cdot A_3 - B_3 - 2 \end{pmatrix}$$

$$K := \text{stack}(Kcos, Ksin)$$

$$R := K \text{ solve}, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{36}{5} & \frac{13}{5} & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & B_3 \end{pmatrix} := R$$

$$H(t) := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \sin(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \cdot \cos(t) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4\cdot\sin(t)}{5} - \frac{3\cdot\cos(t)}{5} \\ \frac{13\cdot\cos(t)}{5} + \frac{36\cdot\sin(t)}{5} \\ -\cos(t) - 11\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$X(t) := W(t) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + H(t) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4\cdot\sin(t)}{5} - \frac{3\cdot\cos(t)}{5} - C_3 + C_1\cdot e^{2\cdot t} \\ \frac{13\cdot\cos(t)}{5} - 10\cdot C_3 + \frac{36\cdot\sin(t)}{5} - 16\cdot C_1\cdot e^{2\cdot t} - C_2\cdot e^{t} \\ 14\cdot C_3 - \cos(t) - 11\cdot\sin(t) + 10\cdot C_1\cdot e^{2\cdot t} + C_2\cdot e^{t} \end{pmatrix}$$

Проверка: $\frac{d}{dt}X(t) = A\cdot X(t) + F(t) \rightarrow 1$

$a_1 := a_1 \quad a_2 := a_2 \quad a_3 := a_3 \quad b_1 := b_1 \quad b_2 := b_2 \quad b_3 := b_3$

Задание 4

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A и соответствующие собственные вектора:

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Система линейно независимых векторов состоит из одного вектора, поэтому решение будем искать в виде:

$$X_2(t) := \begin{pmatrix} a_1 \cdot t^2 + b_1 \cdot t + c_1 \\ a_2 \cdot t^2 + b_2 \cdot t + c_2 \\ a_3 \cdot t^2 + b_3 \cdot t + c_3 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}$$

Для определения коэффициентов применим метод неопределенных коэффициентов.

$$S(t) := e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot \left(\frac{d}{dt} X_2(t) - A \cdot X_2(t) \right) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 + c_1 + c_2 - c_3 + a_1 \cdot t^2 + a_2 \cdot t^2 - a_3 \cdot t^2 + 2 \cdot a_1 \cdot t + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t - b_3 \cdot t \\ b_2 + 3 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 + 3 \cdot a_1 \cdot t^2 + 2 \cdot a_2 \cdot t^2 - 2 \cdot a_3 \cdot t^2 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot b_1 \cdot t + 2 \cdot b_2 \cdot t - 2 \cdot b_3 \cdot t \\ b_3 + 4 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3 + 4 \cdot a_1 \cdot t^2 + 3 \cdot a_2 \cdot t^2 - 3 \cdot a_3 \cdot t^2 + 2 \cdot a_3 \cdot t + 4 \cdot b_1 \cdot t + 3 \cdot b_2 \cdot t - 3 \cdot b_3 \cdot t \end{pmatrix}$$

$$S0 := S(0) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 + c_1 + c_2 - c_3 \\ b_2 + 3 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 \\ b_3 + 4 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3 \end{pmatrix}$$

$$St := S(t) - S0 \text{ substitute}, t^2 = 0 \rightarrow \text{ substitute}, t = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot a_1 + b_1 + b_2 - b_3 \\ 2 \cdot a_2 + 3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 - 2 \cdot b_3 \\ 2 \cdot a_3 + 4 \cdot b_1 + 3 \cdot b_2 - 3 \cdot b_3 \end{pmatrix}$$

$$Stt := S(t) - S(0) - St \cdot t \text{ substitute}, t = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - a_3 \\ 3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - 2 \cdot a_3 \\ 4 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 - 3 \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

$$M := \text{stack}(S0, St, Stt) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 + c_1 + c_2 - c_3 \\ b_2 + 3 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 \\ b_3 + 4 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3 \\ 2 \cdot a_1 + b_1 + b_2 - b_3 \\ 2 \cdot a_2 + 3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 - 2 \cdot b_3 \\ 2 \cdot a_3 + 4 \cdot b_1 + 3 \cdot b_2 - 3 \cdot b_3 \\ a_1 + a_2 - a_3 \\ 3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - 2 \cdot a_3 \\ 4 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 - 3 \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

$$R := M \left| \begin{array}{l} \text{solve}, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \\ \text{substitute}, a_3 = C_3, b_3 = C_2, c_3 = C_1 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & C_3 & -2 \cdot C_3 & C_2 + 2 \cdot C_3 & -C_2 - 6 \cdot C_3 & C_1 + C_2 + 8 \cdot C_3 \end{pmatrix}$$

$$R1 := R \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & C_3 & -2 \cdot C_3 & C_2 + 2 \cdot C_3 & -C_2 - 6 \cdot C_3 & C_1 + C_2 + 8 \cdot C_3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 := \left(R^T\right)_0 \quad a_2 := \left(R^T\right)_1 \quad b_1 := \left(R^T\right)_2 \quad b_2 := \left(R^T\right)_3 \quad c_1 := \left(R^T\right)_4 \quad c_2 := \left(R^T\right)_5$$

$$a_3 := C_3 \qquad b_3 := C_2 \qquad c_3 := C_1$$

Общее решение уравнения:

$$X(t) := \begin{pmatrix} a_1 \cdot t^2 + b_1 \cdot t + c_1 \\ a_2 \cdot t^2 + b_2 \cdot t + c_2 \\ a_3 \cdot t^2 + b_3 \cdot t + c_3 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \rightarrow \begin{bmatrix} -e^{-t} \cdot \left(C_2 + 6 \cdot C_3 + 2 \cdot C_3 \cdot t\right) \\ e^{-t} \cdot \left[C_3 \cdot t^2 + \left(C_2 + 2 \cdot C_3\right) \cdot t + C_1 + C_2 + 8 \cdot C_3\right] \\ e^{-t} \cdot \left(C_3 \cdot t^2 + C_2 \cdot t + C_1\right) \end{bmatrix}$$

Задание 5

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -5 & -5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы А и соответствующие собственные вектора:

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix} \qquad V := \text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)\cdot i & -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_1 := \text{eigenvec}(A, \lambda_2) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_1(t) := e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot h_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -2\cdot e^{-2\cdot t} \\ -e^{-2\cdot t} \\ e^{-2\cdot t} \end{pmatrix}$$

$$h_2 := \text{eigenvec}(A, \lambda_0) \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)\cdot i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) := e^{\lambda_0 \cdot t} \cdot h_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -e^{t\cdot(1-i)} \\ e^{t\cdot(1-i)} \cdot \left[-\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)\cdot i\right] \\ e^{t\cdot(1-i)} \end{bmatrix}$$

$$X_{21}(t) := \mathrm{Re}\left(X_2(t)\right) \text{ assume}, t = \text{real} \;\rightarrow \begin{pmatrix} -e^t \cdot \cos(t) \\ -\frac{2\cdot e^t \cdot \cos(t)}{5} - \frac{e^t \cdot \sin(t)}{5} \\ e^t \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$X_{22}(t) := \mathrm{Im}\left(X_2(t)\right) \text{ assume}, t = \text{real} \;\rightarrow \begin{pmatrix} e^t \cdot \sin(t) \\ \frac{2\cdot e^t \cdot \sin(t)}{5} - \frac{e^t \cdot \cos(t)}{5} \\ -e^t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Общее решение: $X(t) := C_1 \cdot X_1(t) + 5 \cdot C_2 \cdot X_{21}(t) + 5 \cdot C_3 \cdot X_{22}(t)$

$$X(t)\ \text{simplify}\ \rightarrow \begin{pmatrix} 5\cdot C_3\cdot e^{t}\cdot\sin(t) - 5\cdot C_2\cdot e^{t}\cdot\cos(t) - 2\cdot C_1\cdot e^{-2\cdot t} \\ 2\cdot C_3\cdot e^{t}\cdot\sin(t) - 2\cdot C_2\cdot e^{t}\cdot\cos(t) - C_3\cdot e^{t}\cdot\cos(t) - C_2\cdot e^{t}\cdot\sin(t) - C_1\cdot e^{-2\cdot t} \\ C_1\cdot e^{-2\cdot t} + 5\cdot C_2\cdot e^{t}\cdot\cos(t) - 5\cdot C_3\cdot e^{t}\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

Проверка: $\frac{d}{dt}X(t) = A\cdot X(t) \rightarrow 1$

Вещественная фундаментальная матрица:

$$W(t) := \text{augment}\left(X_1(t), X_{21}(t), X_{22}(t)\right)\ \text{simplify}\ \rightarrow \begin{bmatrix} -2\cdot e^{-2\cdot t} & -e^{t}\cdot\cos(t) & e^{t}\cdot\sin(t) \\ -e^{-2\cdot t} & -\frac{e^{t}\cdot(2\cdot\cos(t) + \sin(t))}{5} & -\frac{e^{t}\cdot(\cos(t) - 2\cdot\sin(t))}{5} \\ e^{-2\cdot t} & e^{t}\cdot\cos(t) & -e^{t}\cdot\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$|W(t)|\ \text{simplify}\ \rightarrow -\frac{1}{5}$$