[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

Занятие № 5 | № 6

10.03.2026

Занятие № 5

Уравнения, допускающие понижение порядка

Некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка[1]

Дифференциальное уравнение n-го порядка (n > 1) имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

где F есть непрерывная функция своих аргументов, при этом левая часть зависит, по крайней мере, от старшей производной $y^{(n)}$.

Рассмотрим некоторые приемы понижения порядка уравнения (1), которые зависят от вида функции F.

---

[1] Подробнее см., например, в кн.: *Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004* (гл. IV, § 2–4).

I. Если уравнение (1) не содержит искомой функции, т.е. оно имеет вид $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$, то заменой $z = y^{(k)}$ получим уравнение $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right)=0$, порядок которого ниже на k единиц.

№ 421 [Ф]: $x^2 y'' = (y')^2$. (421.1)

Заменой $z = y'$ уравнение приводится к виду $x^2 z' = z^2$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $z = 0$ является решением. Ненулевые решения найдем, разделяя переменные:

$$x^2 \frac{dz}{dx} = z^2, \qquad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}, \qquad \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} - C_1,$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1, \quad z = \frac{x}{C_1 x + 1}, \quad C_1 \in R.$$

Возвращаясь к замене, получим:

1) $y' = 0, \quad y = C;$

2) $y' = \dfrac{x}{C_1 x + 1},$

$$y = \int \frac{x\,dx}{C_1 x + 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C, & если \quad C_1 = 0, \\ \dfrac{1}{C_1}\left(x - \dfrac{1}{C_1}\ln\left|C_1 x + 1\right| + C_2\right), & если \quad C_1 \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{C_1 y = x - \dfrac{1}{C_1}\ln\left|C_1 x + 1\right| + C_2, \quad 2y = x^2 + C, \quad y = C.}$

№ 422 [Ф]: $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ (422.1)

Заменой $y' = z$ понизим порядок уравнения, получим

$$2xzz' = z^2 - 1. \qquad (422.2)$$

Уравнение (422.2) является уравнением с разделяющимися переменными. Для него $z = \pm 1$ – решения, и им соответствуют решения заданного уравнения:

$$y' = \pm 1 \;\to\; y = \pm x + C.$$

Другие решения найдем, разделяя переменные в уравнении (422.2):

$$\frac{2zdz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x} \;\to\; \ln\left|z^2 - 1\right| = \ln|x| + \ln|C_1| \;\to\; z^2 = C_1 x + 1,\; C_1 \neq 0,$$

$$(y')^2 = C_1 x + 1 \;\to\; y' = \pm\sqrt{C_1 x + 1} \to y = \pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1 x + 1\right)^{3/2} + C_2,$$

$$9C_1^2 (y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3,\; C_1 \neq 0.$$

Ответ: $\boxed{9C_1^2 (y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3; \quad y = \pm x + C.}$

II. Если уравнение (1) не содержит независимой переменной x, т.е. оно имеет вид $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$ то порядок уравнения можно понизить, взяв y за новую “независимую” переменную и сделав замену $y' = p(y)$. При такой замене для производных порядка выше первого будем иметь:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(p(y)\right) = \frac{dp}{dy}\cdot y' = p' \cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p'(y)p(y)\right) = \frac{d}{dy}\left(p' \cdot p\right)\cdot y' = \frac{d}{dy}\left(p' \cdot p\right)\cdot p = p'' p^2 + (p')^2 p,$$

$$y^{(4)} = \frac{d}{dx}\left(p'' p^2 + (p')^2 p\right) = \frac{d}{dy}\left(p'' p^2 + (p')^2 p\right)\cdot y' =$$

$$= \frac{d}{dy}\left(p'' p^2 + (p')^2 p\right)\cdot p = p''' p^3 + 4p'' p' p^2 + (p')^3 p,$$

и т.д. Заметим, что $y^{(k)} = g_k(p, p', p'', \ldots, p^{(k-1)})$. Следовательно, при указанной замене будет получено уравнение ($n-1$)-го порядка относительно новой неизвестной функции p:

$$F_1\left(y, p, p', p'', \ldots p^{(n-1)}\right) = 0.$$

№ 425 [Ф]: $y'' = 2yy'$. (425.1)

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$pp' = 2yp. \tag{425.2}$$

Очевидно, p = 0 является решением. Для него будем иметь

$$y' = 0 \;\rightarrow\; y = C. \tag{425.3}$$

Другие решения найдем, разделив обе части уравнения (425.2) на p:

$$pp' = 2yp \quad\rightarrow\quad p' = 2y \quad\rightarrow\quad p = y^2 + C, \quad C \in R.$$

Выполнив обратную замену, получим уравнение:

$$y' = y^2 + C, \tag{425.4}$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Построим его решение, рассматривая три случая:

1) Если C = 0, то будем иметь $y' = y^2$. Очевидно, оно имеет решение y = 0. Ненулевые решения найдем, разделяя переменные:

$$y' = y^2 \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{y^2} = dx \;\rightarrow\; -\frac{1}{y} = x + C_1 \quad\rightarrow\quad y = -\frac{1}{x + C_1}.$$

2) Если C > 0, то, для удобства, обозначив $C = C_1^2$, решим уравнение $y' = y^2 + C_1^2$. Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dy}{y^2 + C_1^2} = dx \;\rightarrow\; \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = x + C_2 \rightarrow \operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = C_1\left(x + C_2\right).$$

3) Если C < 0, то, обозначив $C = -C_1^2$, будем иметь $y' = y^2 - C_1^2$. Очевидно, $y = \pm C_1$ являются решениями уравнения. Другие решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx \;\rightarrow\; \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = x + C_2.$$

Учитывая, что решения y = 0 и $y = \pm C_1$ входят в первое найденное множество решений (425.3), запишем ответ.

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{C_1} = C_1(x + C_2), \quad \ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1(x + C_2), \\ y = -\dfrac{1}{x + C}, \quad y = C. \end{array}}$$

№ 429 [Ф]: $yy'' = (y')^2 - (y')^3.$ (429.1)

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3. \tag{429.2}$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Для него будем иметь

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ p = 1, \\ \dfrac{dp}{p(1-p)} = \dfrac{dy}{y}. \end{array}\right.$$

Найдем решение последнего уравнения:

$$\frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dy}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)dp = \frac{dy}{y} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \ln|p| - \ln|p-1| = \ln|y| + \ln|C_1| \quad \rightarrow \quad \frac{p}{p-1} = C_1 y \quad \rightarrow \quad p = \frac{C_1 y}{C_1 y - 1}.$$

Возвращаясь к замене, будем иметь:

1) $p=0 \;\rightarrow\; y'=0 \;\rightarrow\; y=C;$

2) $p=1 \;\rightarrow\; y'=1 \;\rightarrow\; y=x+C;$

3) $$p=\frac{C_1y}{C_1y-1} \;\rightarrow\; y'=\frac{C_1y}{C_1y-1} \;\rightarrow\; \frac{C_1y-1}{C_1y}dy=dx \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad y-\frac{1}{C_1}\ln|y|=x+C_2.$$

Решения, полученные в пунктах 2) и 3), можно объединить, записав ответ следующим образом:

Ответ: $\boxed{y+C_1\ln|y|=x+C_2;\quad y=C.}$

(при $C_1=0$ получим $y=x+C_2$)

Домашнее задание

[Ф] №№ **433, 435**.

17.03.2026

Занятие № 6

Уравнения, допускающие понижение порядка

III. Понижение порядка уравнения приведением обеих частей уравнения к полной производной

№ 456 [Ф]: $y'y'''=2(y'')^2.$ (456.1)

Сначала понизим порядок уравнения заменой $z=y'$. В результате будем иметь:

$$z \cdot z'' = 2(z')^2. \tag{456.2}$$

Заметим, что $z = C_1$ является решением уравнения (456.2) и тогда, решая уравнение $y' = C_1$, найдем $y = C_1x + C_2$. Другие решения уравнения (456.3) найдем, выполнив следующую цепочку преобразований:

$$z \cdot z'' = 2(z')^2 \;\to\; \frac{z''}{z'} = \frac{2z'}{z} \;\to\; (\ln|z'|)' = 2(\ln|z|)' \;\to$$

$$\to\; \ln|z'| = \ln z^2 + \ln|-C_1| \;\to\; z' = -C_1z^2 \;\to\; \frac{dz}{z^2} = -C_1dx \;\to$$

$$\to\; -\frac{1}{z} = -C_1x - C_2 \;\to\; z = \frac{1}{C_1x + C_2},\;\; C_1 \neq 0.$$

Замечание. Уравнение (456.2) можно решить методом, рассмотренным в п. II, сделав замену $z' = p(z)$.

Возвращаясь к замене, будем иметь:

$$y' = \frac{1}{C_1x + C_2},\;\; C_1 \neq 0 \;\;\to\;\; y = \frac{1}{C_1}\ln|C_1x + C_2| + C_3.$$

Ответ: $\boxed{y = \frac{1}{C_1}\ln|C_1x + C_2| + C_3; \quad y = C_1x + C_2.}$

IV. Если уравнение однородно относительно искомой функции и ее производных, т.е. не меняется при одновременной замене y, y', y'', …, $y^{(n)}$ на ky, ky', ky'', …, $ky^{(n)}$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = y \cdot z$, где z – новая неизвестная функция переменной x.

№ 463 [Ф]: $xyy'' - x(y')^2 = yy'$ (463.1)

1 способ. Функция $F(x, y, y', y'') = xyy'' - x(y')^2 - yy'$ является однородной относительно y, y', y''. Действительно,

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^2 F(x, y, y', y'').$$

Выполним замену $y' = yz$. Так как $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$, то уравнение (463.1) принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2 z \quad \to \quad xy^2 z' = y^2 z. \qquad (463.2)$$

В результате порядок заданного уравнения понижен на единицу. Очевидно, y = 0 является решением. Другие решения найдем, разделив обе части уравнения (463.2) на y^2:

$$xz' = z. \qquad (463.3)$$

z = 0 является решением. Далее, разделив переменные в (463.2), будем иметь:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \to \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln|C| \quad \to \quad z = Cx.$$

Решение z = 0 будет содержаться в полученной формуле при C = 0. Возвращаясь к замене, будем иметь

$$y' = yz \quad \to \quad y' = Cxy \quad \to \quad y = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

Заметим, что решение y = 0 не было потеряно.

2 способ. Заметим, что y = С, где С – произвольная константа, является решением заданного уравнения. Будем искать другие решение, поделив обе части уравнения на yy'. При этом получим

$$x \cdot \frac{y''}{y'} - x \cdot \frac{y'}{y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d \ln|y'|}{dx} - \frac{d \ln|y|}{dx} = \frac{1}{x}.$$

После интегрирования последнего уравнения, будем иметь

$$\ln|y'| - \ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = C_1 x, \quad C_1 \neq 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, найдем

$$\ln|y| = \frac{C_1 x^2}{2} + \ln|C_2| \quad \Leftrightarrow \quad y = C_2 \exp\left(\frac{C_1 x^2}{2}\right), \quad C_1, C_2 \neq 0. \qquad (463.4)$$

Решение y = C можно объединить с (463.3), сняв ограничения на C_1 и C_2.

Ответ: $\boxed{y = C_2 e^{C_1 x^2}.}$

№ 426 [Ф]: $yy''+1=(y')^2$ (426.1)

Замечание. Уравнение не имеет решений вида $y = C$.

Выполнив замену $y' = p(y)$, получим

$$ypp'+1 = p^2 \;\to\; ypp' = p^2 - 1.$$

Очевидно, $p = \pm 1$ – решения уравнения. Тогда

$$y' = \pm 1 \;\to\; y = \pm x + C.$$

Другие решения найдем, разделяя переменные

$$ypp' = p^2 - 1 \;\to\; \frac{pdp}{p^2-1} = \frac{dy}{y} \;\to\; \ln\left|p^2-1\right| = 2\ln|y| + \ln|C| \;\to$$

$$\to\; p^2 = Cy^2 + 1,\;\; C \neq 0.$$

Выполнив обратную замену, получим:

$$(y')^2 = Cy^2 + 1 \;\to\; y' = \pm\sqrt{Cy^2+1}.$$

Полученные уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными, решения которых получим, рассматривая два случая $C > 0$ и $C < 0$.

1. Если $C > 0$, то, полагая $C = C_1^2$, решим уравнение $y' = \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}$. Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 + 1}} = \pm dx \;\to\; \frac{1}{C_1}\ln\left|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}\right| = \pm x + C_2.$$

2. Если $C < 0$, то, полагая $C = -C_1^2$, решим уравнение $y' = \sqrt{1 - C_1^2 y^2}$. Разделяя переменные, будем иметь (в силу замечания, сделанного выше, потери решений не происходит):

$$\frac{dy}{\sqrt{1-C_1^2y^2}}=\pm dx \;\rightarrow\; \frac{1}{C_1}\arcsin(C_1y)=\pm x+C_2.$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} y=\pm x+C, \\ \ln\left|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2+1}\right|=C_1(\pm x+C_2); \\ \arcsin(C_1y)=C_1(\pm x+C_2). \end{array}}$$

№ 434 [Ф]: $y''+(y')^2=2e^{-y}$. (434.1)

Выполнив замену $y'=p(y)$, получим

$$pp'+p^2=2e^{-y}.$$

Заменой $p^2=u(y)$ уравнение сводится к линейному

$$u'+2u=4e^{-y}. \quad (434.2)$$

Для соответствующего однородного уравнения имеем:

$$u'+2u=0 \;\rightarrow\; u=Ce^{-2y}.$$

Применяя метод вариации произвольной постоянной, будем искать решение уравнения (434.2) в виде:

$$u=C(y)e^{-2y}. \quad (434.3)$$

Подставляя (434.3) в (434.2), получим

$$C'(y)=4e^{y} \;\rightarrow\; C(y)=4e^{y}+C_1.$$

Найдя общее решение уравнения (434.2):

$$u=(4e^{y}+C_1)e^{-2y},$$

выполним обратные замены:

$$p^2=(4e^{y}+C_1)e^{-2y} \;\rightarrow\; (y')^2=(4e^{y}+C_1)e^{-2y} \;\rightarrow\; y'=\pm\frac{\sqrt{4e^{y}+C_1}}{e^{y}}.$$

Решим полученные уравнения, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{4e^y+C_1}}{e^y}\quad\rightarrow\quad\frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y+C_1}}=\pm dx\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2}\sqrt{4e^y+C_1}=\pm x+C_2.$$

Замечание. При разделении не происходит потеря решений, так как уравнение (434.1) не имеет решений вида $y=C$.

Ответ: $\boxed{\sqrt{4e^y+C_1}=2(C_2\pm x).}$

Замечание. Полученное решение можно преобразовать к виду

$$e^y+C_1=(x+C_2)^2.$$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **437, 438, 447, 460.**