



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. [djvu](#)



[Занятие № 2](#)

[№ 3](#)

[№4](#)

10.02.2026

Занятие № 1

Уравнения 1-порядка (повторение)

№ 358 [М]: $(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0.$ (358.1)

Здесь $P(x, y) = x \sin y + y \cos y$, $Q(x, y) = x \cos y - y \sin y$.

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = (x \cos y + \cos y - y \sin y - \cos y) \cdot \frac{1}{x \cos y - y \sin y} = 1,$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (358.1) примет вид

$$e^x (x \cos y - y \sin y)dy + e^x (x \sin y + y \cos y)dx$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^x (x \sin y + y \cos y), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y). \end{cases} \quad (358.2)$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) + \varphi(y). \quad (358.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y) + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (358.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (358.3). В результате получим

$$u(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y).$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C.$$

Ответ: $e^x (x \sin y - \sin y + y \cos y) = C.$

№ 195 [Ф]: $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0. \quad (195.1)$

1 способ. Здесь $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$, $Q(x, y) = y$. Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Но так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = 2,$$

то существует интегрирующий множитель, который является функцией x и находится по формуле:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (195.1) примет вид

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах¹. Заметим, что так как $\mu(x) = e^{2x} \neq 0$, то при преобразовании заданного уравнения не происходит потеря решений или приобретение посторонних решений. В результате будем иметь

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^{2x}y. \end{cases} \quad (195.2)$$

Из второго равенства системы найдем

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}y^2}{2} + \varphi(x). \quad (195.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{2x}y^2 + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства системы (195.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

¹ Проверка: $\frac{\partial(e^{2x}(x^2 + y^2 + x))}{\partial y} = 2ye^{2x}$, $\frac{\partial(e^{2x}y)}{\partial x} = 2ye^{2x}$.

$$\varphi'(x) = e^{2x}(x^2 + x), \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(e^{2x}x^2)}{dx} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{e^{2x}x^2}{2} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (195.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}(x^2 + y^2)}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^{2x}(x^2 + y^2) = C. \quad (195.4)$$

2 способ. Применим метод выделения полных дифференциалов. Для заданного уравнения имеем:

$$(x^2 + y^2)dx + xdx + ydy = 0, \quad 2(x^2 + y^2)dx + d(x^2 + y^2) = 0,$$

$$2dx + \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0, \quad 2dx + d(\ln(x^2 + y^2)) = 0,$$

$$d(2x + \ln(x^2 + y^2)) = 0, \quad 2x + \ln(x^2 + y^2) = C.$$

Полученный общий интеграл потенцированием приводится к виду (195.4).

Заметим, что точка $(x, y) = (0, 0)$ является для заданного уравнения особой точкой, поэтому приведенные выше преобразования выполнены при условии $x^2 + y^2 \neq 0$.

Ответ: $e^{2x}(x^2 + y^2) = C$.

№ 301 [Ф]: $xy' + x^2 + xy - y = 0. \quad (301.1)$

Уравнение является линейным неоднородным. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$xy' + y(x - 1) = 0.$$

Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, получим $y = Cxe^{-x}$. Далее применим метод вариации произвольной постоянной:

$$x(C'(x)xe^{-x} + C(x)e^x - C(x)xe^{-x}) + C(x)xe^{-x}(x-1) + x^2 = 0,$$
$$x^2e^{-x}C'(x) = -x^2, \quad C'(x) = -e^x, \quad C(x) = -e^x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, $y = C(x)xe^{-x} = -x + C_1xe^{-x}$, $C_1 \in R$.

Ответ: $y = x(Ce^{-x} - 1)$.



Домашнее задание

[Матвеев] № 356:

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

[Матвеев] № 357:

$$(xy^2 + y)dx - xdy = 0.$$

17.02.2026

Занятие № 2



Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения



[Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной](#)

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

При решении такого уравнения можно попытаться разрешить его относительно производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. получить одно или несколько уравнений, разрешенных относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Полученные уравнения решаются рассмотренными ранее методами.

Задача Коши для уравнения (1) с условием $y(x_0) = y_0$ имеет **единственное решение** (точка $(x_0; y_0)$ является *точкой единственности* решения), **если не существует двух интегральных кривых уравнения (1), которые бы проходили через точку $(x_0; y_0)$ и имели бы в этой точке общую касательную**. В противном случае в точке $(x_0; y_0)$ единственность решения задачи Коши нарушается (точка $(x_0; y_0)$ является точкой неединственности решения задачи Коши).

Уравнения вида (1) могут иметь **особые** решения, т.е. такие решения, соответствующая интегральная кривая которых целиком состоит из точек неединственности.

Задание 1. Решить уравнение $(y')^2 - 1 = 0$ и нарисовать его интегральные кривые. Нарушается ли в каких-либо точках плоскости xOy единственность решения этого уравнения?

Для заданного уравнения имеем

$$(y')^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y' = 1, \\ y' = -1. \end{cases}$$

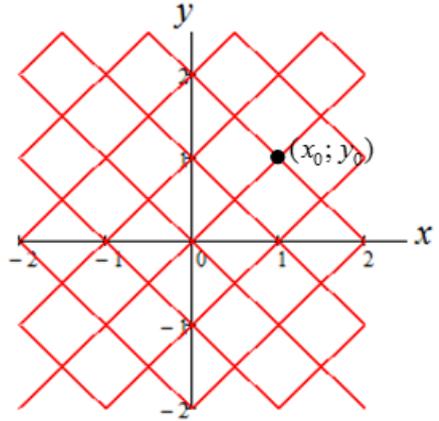
Решениями уравнений являются соответственно два семейства функций:

$$y = x + C \text{ и } y = -x + C,$$

графики которых определяют два семейства интегральных кривых заданного уравнения (см. рис.). Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости xOy проходят две интегральные кривые заданного уравнения:

$$y - y_0 = x - x_0 \text{ и } y - y_0 = -x + x_0.$$

Так как эти интегральные кривые пересекаются под прямым углом, то единственность решения не нарушается.



№ 241 [Ф]: $(y')^2 - y^2 = 0$

(241.1)

Заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$y' = y \text{ и } y' = -y,$$

интегрируя которые найдем два семейства функций

$$y = Ce^x \text{ и } y = Ce^{-x}, \quad C \in R,$$

определяющих решения заданного уравнения. При $C = 0$ оба семейства определяют решение $y = 0$. Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 1.

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости xOy , за исключением принадлежащих оси x , проходят две интегральные кривые. Но так как касательные к интегральным кривым, проведенные в точке $(x_0; y_0)$, не совпадают, а через точки оси x проходит одна интегральная кривая, то все точки плоскости являются точками единственности.

Ответ: $y = Ce^{\pm x}, \quad C \in R.$

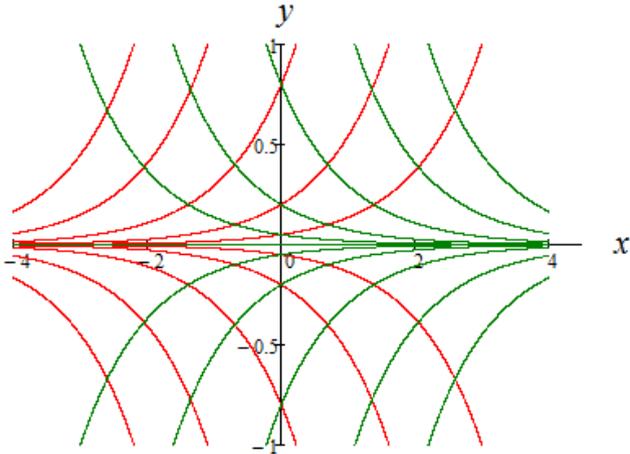


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (241.1)

№ 242 [Ф]: $8(y')^3 = 27y$

(242.1)

Разрешив заданное уравнение относительно производной, получим уравнение

$$y' = \frac{3}{2} y^{1/3}.$$

Очевидно, $y = 0$ является решением. Остальные решения найдем, применяя метод разделения переменных:

$$\frac{2}{3} \frac{dy}{y^{1/3}} = dx, \quad y^{2/3} = x + C, \quad y^2 = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, заданное уравнение имеет решения:

$$y^2 = (x + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = 0.$$

Соответствующие им интегральные кривые показаны на рис. 2.

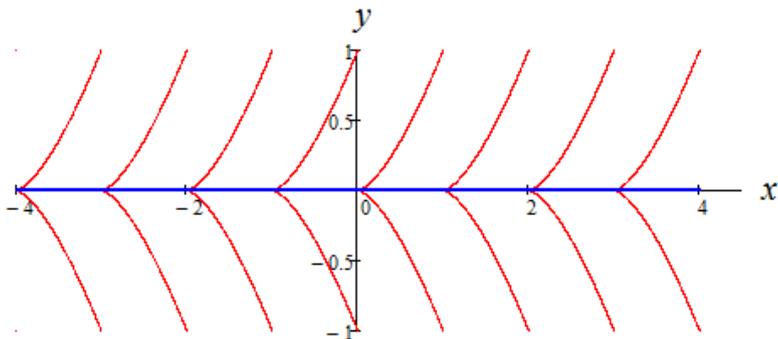


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (242.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости, за исключением принадлежащих оси x , проходит одна интегральная кривая. Решение $y = 0$ является особым.

Ответ: $y^2 = (x + C)^3, C \in R, y = 0.$

№ 244 [Ф]: $y^2((y')^2 + 1) = 1$ (244.1)

Заметим, что $y = 0$ не является решением заданного уравнения, для которого имеем

$$(y')^2 = \frac{1 - y^2}{y^2} \Leftrightarrow y' = \pm \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}, y \in [-1; 1].$$

Очевидно, $y = \pm 1$ – решения уравнения. Остальные решения находятся методом разделения переменных, получив общий интеграл

$$x + C = \pm \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow y^2 + (x + C)^2 = 1, C \in R.$$

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 3.

Интегральные кривые, описываемые уравнением $x + C = \sqrt{1 - y^2}$, – правые части окружностей с центрами в точках $(-C, 0)$ ($C \in R$). Инте-

гравные кривые, описываемые уравнением $-(x+C) = \sqrt{1-y^2}$, — левые части окружностей с центрами в точках $(-C, 0)$ ($C \in \mathbb{R}$).

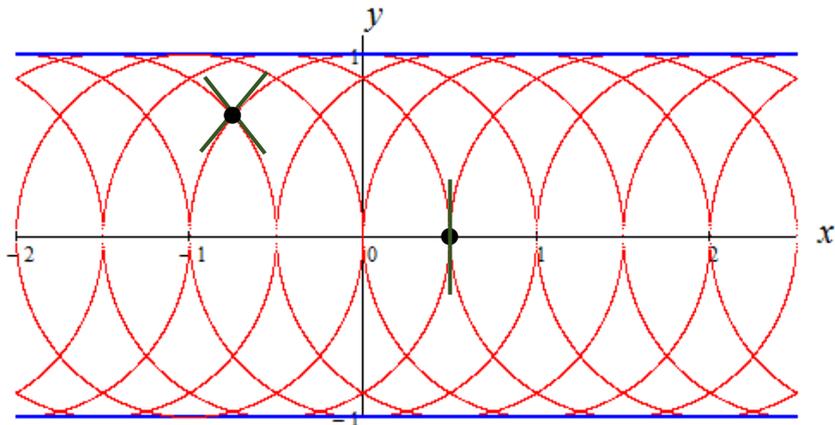


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (244.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости, ограниченной прямыми $y = \pm 1$ проходят две интегральные кривые. Но только точки на прямых $y = \pm 1$ и $y = 0$ являются точками неединственности. Решения $y = \pm 1$ являются особыми.

Ответ: $(x+C)^2 + y^2 = 1, C \in \mathbb{R}, y = \pm 1.$

№ 249 [Ф]: $(y')^3 + y^2 = yy'(y'+1)$ (249.1)

Для заданного уравнения имеем

$$(y')^3 + y^2 = yy'(y'+1), \quad (y')^3 - y(y')^2 + y^2 - yy' = 0,$$

$$(y')^2(y'-y) - y(y'-y) = 0, \quad (y'-y)((y')^2 - y) = 0.$$

Получаем, что уравнение (249.1) равносильно совокупности следующих уравнений:

$$\begin{cases} y' - y = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \quad y \geq 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -\sqrt{y}, \quad y \geq 0. & (3) \end{cases}$$

Интегрируя первое, найдем его общее решение

$$y = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Интегрируя два других, найдем

$$2\sqrt{y} = \pm(x + C), \quad y = 0.$$

Так как

$$2\sqrt{y} = \pm(x + C) \Leftrightarrow y = \frac{(x + C)^2}{4}, \quad (4)$$

то нетрудно установить, что семейство парабол (4) имеет огибающую $y = 0$, которая является особым решением уравнений (2) и (3), а, следовательно, и особым решением заданного уравнения (249.1). **(Заметим, что решение $y = 0$ является частным для уравнения (1)).**

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 4.

Замечание. Уравнению (2) соответствуют интегральные кривые, которые являются правыми ветвями парабол:

$$y = \frac{(x + C)^2}{4}, \quad x \geq -C, \quad \forall C.$$

Уравнению (3) соответствуют интегральные кривые, которые являются левыми ветвями парабол:

$$y = \frac{(x + C)^2}{4}, \quad x \leq -C, \quad \forall C.$$

Ответ: $y = Ce^x$, $4y = (x + C)^2$, $C \in \mathbb{R}$; $y = 0$ – особое решение.

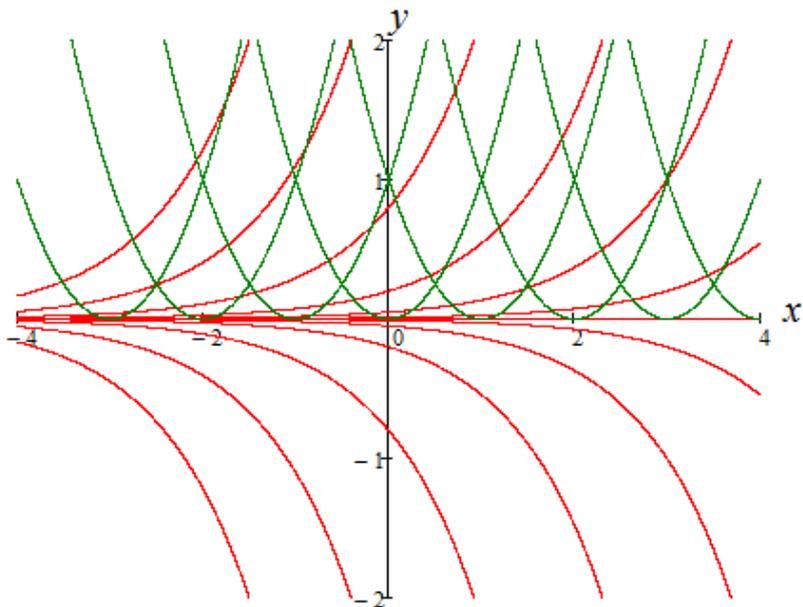


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (249.1)



Домашнее задание

[Ф] №№ 243, 246; [М] № 527: $(y')^3 - \frac{y'}{4x} = 0$

24.02.2026

Занятие № 3



Уравнения, не разрешенные относительно производной.

№ 251 [Ф]: $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$ (251.1)

Для заданного уравнения имеем

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy', \quad (y')^2 - y^2 = x(y' - y),$$
$$(y' - y)(y' + y - x) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} y' - y = 0, & (1) \\ y' + y - x = 0. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение

$$y = Ce^x, \quad C \in R.$$

Уравнение (2) является линейным неоднородным и может быть решено, например, сведением к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = x - y$. Общим решением уравнения (2) является

$$y = Ce^{-x} + x - 1, \quad C \in R.$$

Оба найденных решений дают множество решений заданного уравнения. Его общий интеграл можно записать в виде:

$$(y - Ce^x)(y - Ce^{-x} - x + 1) = 0, \quad C \in R.$$

Интегральные кривые заданного уравнения (251.1) показаны на рис. 5.

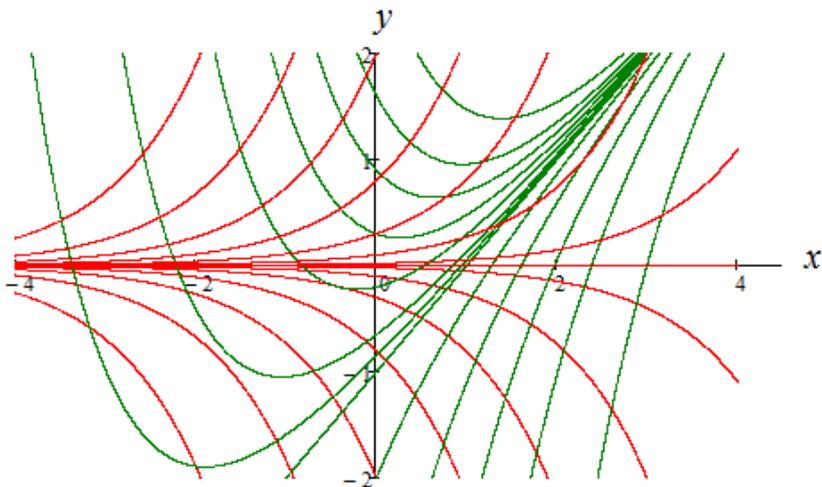


Рис. 5. Интегральные кривые уравнения (251.1)

Замечание. Можно показать, что заданное уравнение не имеет особых решений, используя следующий способ.

Пусть функция $F = F(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$. Геометрическое место точек $\varphi(x, y) = 0$, получаемых путем исключения y' из уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0,$$

Называется *дискриминантной кривой* дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$. Следует проверить, является ли дискриминантная кривая, удовлетворяющая этому уравнению, особым решением, т. е. касаются ли ее в каждой точке другие решения.

Для рассматриваемого уравнения (251.1) условия для определения дискриминантной кривой имеют вид

$$\begin{cases} F(x, y, y') = (y')^2 + xy - y^2 - xy' = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{x}{2}, \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Несовместность полученных условий позволяет сделать вывод, что нет дискриминантных кривых, удовлетворяющих заданному уравнению. Следовательно, и нет особых решений.

Ответ: $y = Ce^x, y = Ce^{-x} + x - 1.$

№ 528 [М]: Проинтегрировать уравнение

$$(y')^3 - x(y')^2 - 4yy' + 4xy = 0 \quad (528.1)$$

Выделить интегральные кривые, проходящие через точки $M_1(0;1), M_2(1; 0), M_3(0; 0).$

Разрешим заданное уравнение относительно y' :

$$(y')^2(y'-x) - 4y(y'-x) = 0 \Leftrightarrow (y'-x)((y')^2 - 4y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'-x = 0, & (1) \\ y' = 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0, & (2) \\ y' = -2\sqrt{y}, \quad y \geq 0. & (3) \end{cases}$$

Интегрируя первое, найдем его общее решение

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in R.$$

Интегрируя два других, найдем

$$\sqrt{y} = \pm(x + C), \quad y = 0.$$

Так как

$$\sqrt{y} = \pm(x+C) \Leftrightarrow y = (x+C)^2, \quad (4)$$

и семейство парабол (4) имеет огибающую $y = 0$, то $y = 0$ является особым решением заданного уравнения.

Таким образом установили все решения заданного уравнения:

- 1) семейство парабол $y = \frac{x^2}{2} + C$,
- 2) семейство правых ветвей парабол $y = (x+C)^2$,
- 3) семейство левых ветвей парабол $y = (x+C)^2$,
- 4) особое решение $y = 0$.

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 6.

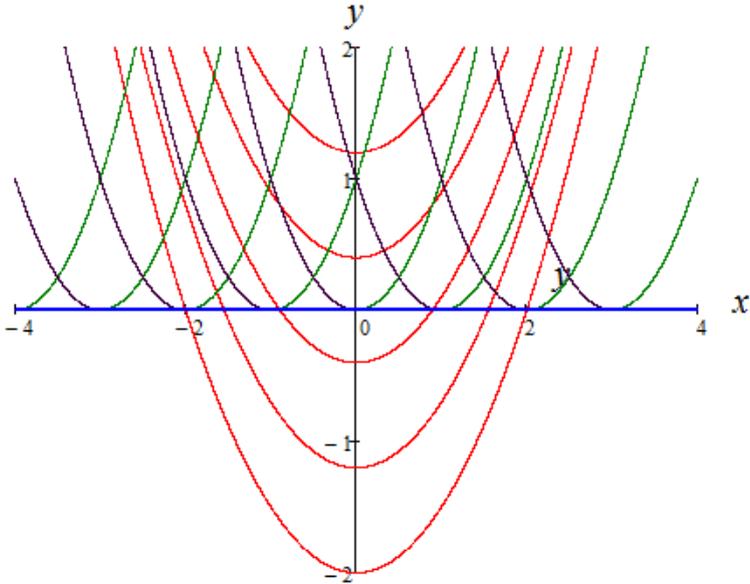


Рис. 6. Интегральные кривые уравнения (528.1)

Через точку $M_1(0;1)$ проходят следующие интегральные кривые из первых трех семейств (рис. 7):

$$y = \frac{x^2}{2} + 1; \quad y = (x+1)^2, \quad x \geq -1; \quad y = (x-1)^2, \quad x \leq 1.$$

При этом для каждой интегральной кривой соответственно имеем:

$$y'(0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) \Bigg|_{x=0} = 0, \quad y'(0) = \frac{d}{dx} (x+1)^2 \Bigg|_{x=0} = 2,$$

$$y'(0) = \frac{d}{dx} (x-1)^2 \Bigg|_{x=0} = -2.$$

Точка $(x_0; y_0)$ является точкой единственности уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \quad (*)$$

если можно указать такую окрестность точки $(x_0; y_0)$, через каждую точку которой проходит столько интегральных кривых уравнения (*), сколько направлений поля определяется уравнением (*) в точке $(x_0; y_0)$.

Вывод: точка $M_1(0;1)$ – точка единственности (рис. 7).

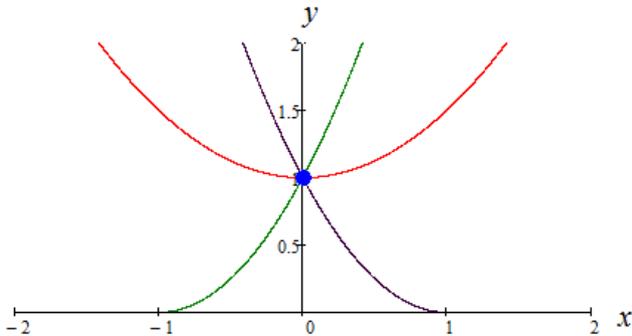


Рис. 7. Интегральные кривые уравнения (528.1), проходящие через точку M_1

Через точку $M_2(1;0)$ проходят следующие интегральные кривые из перечисленного выше множества (рис. 8):

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}; \quad y = (x - 1)^2, x \leq 1; \quad y = (x - 1)^2, x \geq 1; \quad y = 0.$$

Т.е. через точку M_2 проходят 4 интегральные кривые, но при этом для каждой интегральной кривой соответственно имеем:

$$y'(1) = \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right) \right|_{x=1} = 1, \quad y'(1) = \left. \frac{d}{dx} (x - 1)^2 \right|_{x=1} = 0,$$

$$y'(1) = \left. \frac{d}{dx} (x - 1)^2 \right|_{x=1} = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Вывод: так как в точке M_2 определено два различных направления, а не 4, то точка не является точкой единственности (рис. 8).

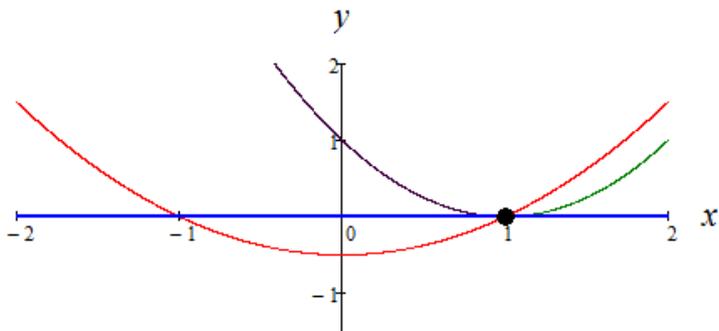


Рис. 8. Интегральные кривые уравнения (528.1), проходящие через точку M_2

Через точку $M_3(0;0)$ проходят следующие интегральные кривые (рис. 9):

$$y = \frac{x^2}{2}; \quad y = x^2, x \geq 0; \quad y = x^2, x \leq 0; \quad y = 0.$$

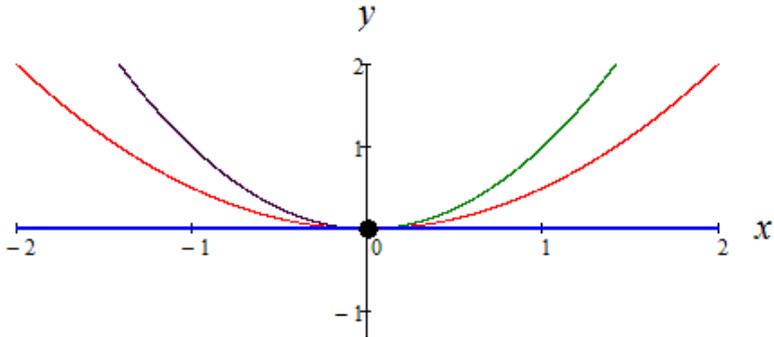


Рис. 9. Интегральные кривые уравнения (528.1), проходящие через точку M_3

Через точку M_3 проходит не одна интегральная кривая, но для каждой через эту точку проходит одна и та же касательная $y = 0$.

Вывод: точка M_3 не является точкой единственности.

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} + C, \quad y = (x + C)^2, \quad C \in R, \quad y = 0.$

№ 310 [Ф]: $(y')^2 + 2(x-1)y' - 2y = 0$ (310.1)

Разрешим уравнение, рассматривая его как квадратное относительно y' . В результате получим два уравнения:

$$\begin{cases} y' = -(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 2y}, \\ y' = -(x-1) - \sqrt{(x-1)^2 + 2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' + (x-1) = \sqrt{(x-1)^2 + 2y}, \\ y' + (x-1) = -\sqrt{(x-1)^2 + 2y}. \end{cases}$$

Выполнив замену $u = (x-1)^2 + 2y$, получим:

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{u}, \\ u' = -2\sqrt{u}. \end{cases}$$

Интегрируя полученные уравнения, найдем:

$$u = 0, \quad \sqrt{u} = \pm(x+C).$$

Возвращаясь к замене, получим множество решений заданного уравнения:

$$(x-1)^2 + 2y = 0, \quad \sqrt{(x-1)^2 + 2y} = \pm(x+C).$$

Так как

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + 2y} = \pm(x+C) &\Leftrightarrow 2y = (x+C)^2 - (x-1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2y = (C+1)(2x+C-1), \end{aligned}$$

то ответ можно записать следующим образом:

Ответ: $2y = (C+1)(2x+C-1); \quad 2y = -(x-1)^2.$

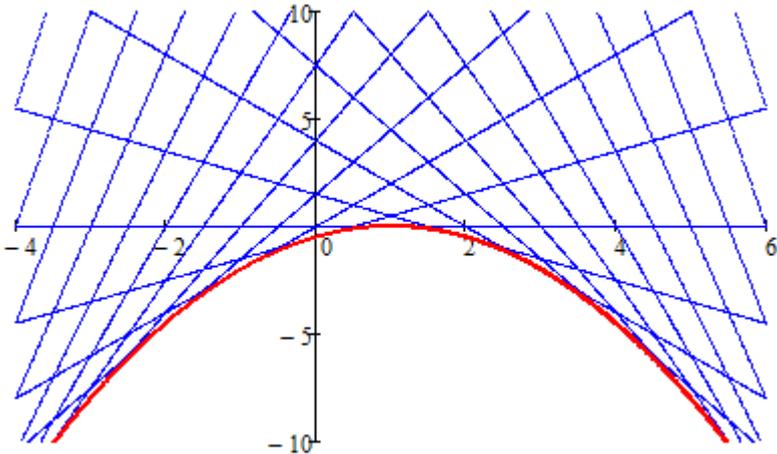


Рис. 10. Интегральные кривые уравнения (310.1)

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра

Не всегда уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

разрешается относительно производной y' , а, если и разрешается, то не всегда полученные при этом уравнения $y' = f_i(x, y)$ легко интегрируются. В этих случаях для решения уравнения (1) можно применить **метод введения параметра**. Он позволяет свести уравнение (1) к уравнению, разрешенному относительно производной. Рассмотрим вариант этого метода для случая, когда уравнение (1) легко разрешается относительно y или относительно x^2 .

1. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $x = f(y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$x = f(y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = p dx, \\ x = f(p). \end{cases}$$

При этом

$$dy = pd(f(p)), \quad dy = pf'(p)dp.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$y = \int pf'(p)dp + C.$$

В результате получаем решения исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int pf'(p)dp + C. \end{cases}$$

Если возможно, то исключаем параметр, получив общее решение рассматриваемого уравнения в одном из следующих видов:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad y = \varphi(x, C), \quad x = \varphi(y, C).$$

2. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $y = f(y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

² Другие варианты применения метода см., например, в кн.: Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004 (гл. III, § 2).

$$y = f(y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = p dx, \\ y = f(p). \end{cases}$$

При этом

$$d(f(p)) = p dx \quad f'(p) dp = p dx.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C.$$

В результате получаем решение исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C, \\ y = f(p). \end{cases}$$

Если $p = 0$ является решением уравнения $f'(p) dp = p dx$, то к найденному решению следует добавить и решение $y = f(0)$.

3. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $x = f(y, y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$x = f(x, y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = p dx, \\ x = f(y, p). \end{cases}$$

При этом

$$dy = p d(f(y, p)), \quad dy = p \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \right).$$

Если найдем решения полученного уравнения в виде $y = \Phi(x, C)$, то решение исходного уравнения получим в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = f(y, p), \\ y = \Phi(p, C). \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения проводятся и в случае, когда уравнение (1) можно привести к виду $y = f(x, y')$.

$$\text{№ 267 [\Phi]: } x = (y')^3 + y'. \quad (267.1)$$

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx, \\ x = p^3 + p, \end{cases} \quad \begin{cases} dy = p d(p^3 + p) = (3p^3 + p) dp, \\ x = p^3 + p, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = p^3 + p, \\ y = \frac{3}{4} p^4 + \frac{1}{2} p^2 + C. \end{cases}$$

Ответ: $x = p^3 + p, \quad 4y = 3p^4 + 2p^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

$$\text{№ 272 [\Phi]: } y = \ln(1 + (y')^2). \quad (272.1)$$

1 способ. Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx \\ y = \ln(1 + p^2), \end{cases} \quad \begin{cases} d(\ln(1 + p^2)) = p dx, \\ y = \ln(1 + p^2), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2p}{1 + p^2} dp = p dx, \\ y = \ln(1 + p^2). \end{cases}$$

Решая уравнение $\frac{2p}{1 + p^2} dp = p dx$, найдем:

$$p = 0; \quad x = 2 \arctg p + C.$$

Следовательно, получили следующие решения заданного уравнения:

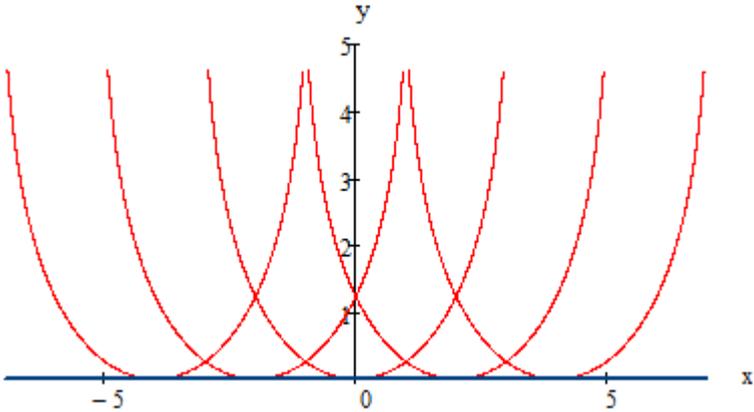
$$\begin{cases} p = 0, \\ x = 2 \arctg p + C, \\ y = \ln(1 + p^2), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \arctg p + C, \\ y = \ln(1 + p^2), \\ y = \ln(1) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} p + C, \quad y = \ln(1 + p^2), \quad C \in R; \quad y = 0.$

Замечание: Решение можно записать и в явной форме, исключив параметр p следующим образом. Имеем

$$y = \ln(1 + p^2) \rightarrow p = \pm(e^y - 1).$$

тогда $x = 2 \operatorname{arctg}(\pm\sqrt{e^y - 1}) + C, \quad x = \pm 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{e^y - 1}) + C.$



Интегральные кривые уравнения (272.1)
(прямая $y = 0$ – особое решение, является огибающей семейства кривых (272.2))

2 способ. Разрешим заданное уравнение относительно производной, получим

$$y' = \pm\sqrt{e^y - 1}, \quad y \geq 0.$$

Очевидно, $y = 0$ является решением. Остальные решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = \pm x + C.$$

Так как при $y > 0$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^y - 1} + C,$$

то решения рассматриваемой пары уравнений, учитывая, что $y > 0$, можно записать следующим образом:

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^y - 1} = \pm x + C. \quad (272.2)$$

Ответ: $2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^y - 1} = \pm x + C, y > 0; y = 0.$



Домашнее задание

[Ф] №№ 252, 269, 271.

Выполнить задания 1 и 2 домашней контрольной работы на тему [«Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра»](#). Срок сдачи работы **24 марта**

03.03.2026

Занятие № 4



Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра

$$\text{№ 274 [Ф]: } y = (y' - 1)e^{y'}. \quad (274.1)$$

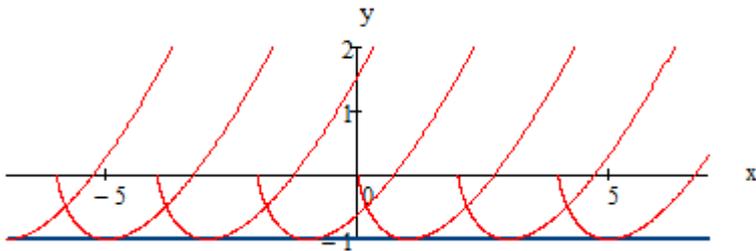
Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx, \\ y = (p - 1)e^p, \end{cases} \quad \begin{cases} d((p - 1)e^p) = p dx, \\ y = (p - 1)e^p, \end{cases} \quad \begin{cases} p e^p dp = p dx, \\ y = (p - 1)e^p \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 0, \\ x = e^p + C, \\ y = (p-1)e^p, \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^p + C, \\ y = (p-1)e^p; \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $x = e^p + C, y = (p-1)e^p, C \in \mathbb{R}; y = -1.$

Замечание. Можно исключить параметр p из записи решения. Так как $p = \ln(x - C)$, то $y = (\ln(x - C) - 1)(x - C)$.



Интегральные кривые уравнения (274.1)
(прямая $y = -1$ – особое решение, является огибающей семейства кривых)

№ 278 [Ф]: $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y.$ (278.1)

Разрешив уравнение относительно y и введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$\begin{cases} dy = p dx, \\ y = \frac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$\frac{1}{4}(2x dx + 2p dx + 2x dp - 2p dp) = p dx, \quad (x - p)(dx + dp) = 0.$$

Тогда одно решение заданного уравнения получим при $p = x$:

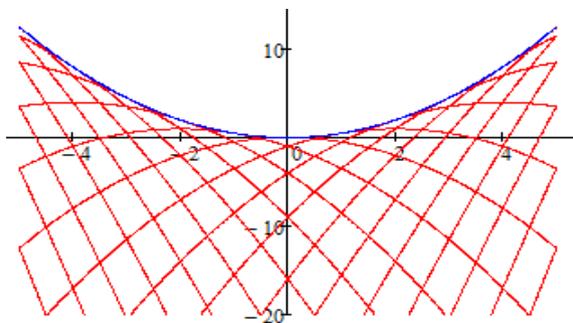
$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x^2 - x^2) = \frac{x^2}{2}.$$

Остальные решения находим, когда $dx + dp = 0$:

$$\begin{cases} dx + dp = 0, \\ y = \frac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases} \quad \begin{cases} p = -x + C, \\ y = \frac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases}$$

Отсюда получим $4y = (C^2 - 2(x - C)^2)$.

Ответ: $4y = C^2 - 2(x - C)^2, C \in \mathbb{R}; 2y = x^2.$



Интегральные кривые уравнения (278.1)

(парабола $2y = x^2$ – огибающая семейства парабол $4y = C^2 - 2(x - C)^2$)

Замечание. Уравнение (274.1) может быть решено и без введения параметра следующим образом. Разрешим уравнение, рассматривая его как квадратное относительно y' . В результате получим два уравнения:

$$\begin{cases} y' = x + \sqrt{2x^2 - 4y}, \\ y' = x - \sqrt{2x^2 - 4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' - x = \sqrt{2x^2 - 4y}, \\ y' - x = -\sqrt{2x^2 - 4y}. \end{cases}$$

Выполнив замену $u = 2x^2 - 4y$, получим:

$$\begin{cases} u' = 4\sqrt{u}, \\ u' = -4\sqrt{u}. \end{cases}$$

Интегрируя полученные уравнения, найдем:

$$u = 0, \quad \sqrt{u} = \pm 2(x + C).$$

Возвращаясь к замене, получим множество решений заданного уравнения:

$$2x^2 - 4y = 0, \quad \sqrt{2x^2 - 4y} = \pm 2(x + C).$$

Так как

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 4y} = \pm 2(x + C) &\Leftrightarrow 2x^2 - 4y = 4(x + C)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y = -4C^2 - 8xC - 2x^2 \xrightarrow{2C=\tilde{C}} &4y = \tilde{C}^2 - 2(x + \tilde{C})^2. \end{aligned}$$

то получаем следующее множество решений:

$$2y = x^2, \quad 4y = C^2 - 2(x + C)^2.$$

№ 287 [Ф]: $y = xy' - (y')^2.$ (287.1)

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p dx, & d(xp - p^2) = p dx, \\ y = xp - p^2, & y = xp - p^2. \end{cases}$$

Для первого уравнения имеем

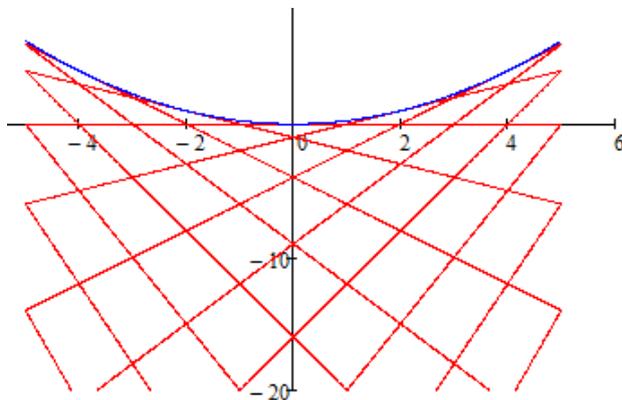
$$d(xp - p^2) = p dx, \quad x dp + p dx - 2p dp = p dx, \quad (x - 2p) dp = 0.$$

Полученное уравнение распадается на два $x - 2p = 0$ и $dp = 0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} d(xp - p^2) = p dx, \\ y = xp - p^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{x}{2}, \\ p = C, \\ y = xp - p^2. \end{cases}$$

Ответ: $y = Cx - C^2, C \in R; 4y = x^2$.



Интегральные кривые уравнения (287.1)
(парабола $4y = x^2$ – огибающая семейства прямых $y = Cx - C^2$)



Домашнее задание

[Ф] № 283.

Выполнить задания домашней контрольной работы на тему [«Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра»](#). Срок сдачи работы **24 марта**

Решение уравнений из [примерного варианта](#) контрольной работы



Доска сообщений

[Записи с доски](#)