[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

Занятие № 11 | № 12 | № 13 | № 14

30.10.2025

Занятие № 10

Самостоятельная работа № 1

45 мин

Примерный вариант

Решите уравнения:

1) $y'\ln y = yx^2 \ln x;$

2) $\left(y' - \dfrac{y}{x}\right)\cos\dfrac{y}{x} = \sin^2\dfrac{y}{x};$

3) $y' = \dfrac{y - 15x + 13}{y + 9x - 11}$

Линейные уравнения 1-го порядка

Интегрирование линейных уравнений

Уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y = f(x),$$

называют **линейным**. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение будет *однородным*, иначе *неоднородным*.

№ 136 [Ф]: $xy' - 2y = 2x^4.$ (136.1)

<u>1 способ</u> (*метод Лагранжа, метод вариации произвольной постоянной*). Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$xy' - 2y = 0. \tag{136.2}$$

Заметим, что функция $y \equiv 0$ является его решением. Другие решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx, \quad \ln|y| = \ln x^2 + \ln|C|, \quad C \neq 0; \quad y = Cx^2, \quad C \in R \setminus \{0\}.$$

Получили, что все решения однородного уравнения (136.2) описывает формула $y = Cx^2$, $C \in R$ (решение $y \equiv 0$ можно получить из последней формулы при $C = 0$). Решение заданного уравнения (136.1) будем искать в виде:

$$y = C(x)x^2. \tag{136.3}$$

Подставив выражение (136.3) в уравнение (136.1), получим:

$$x\left(C'(x)x^2 + 2xC(x)\right) - 2C(x)x^2 = 2x^4, \quad x^3C'(x) = 2x^4,$$

$$C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (136.3). В результате получим решение заданного уравнения:

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2, \quad C \in R$$

<u>Структура общего решения уравнения (136.1)</u>

$$y = \boxed{Cx^2} + \boxed{x^4}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (136.2)

Частное решение неоднородного уравнения (136.1)

2 способ (*метод Бернулли*). Будем искать решение уравнения (136.1) в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x). \qquad (136.4)$$

Подставляя (136.4) в заданное уравнение, получим

$$x(u'c + uv') - 2uv = 2x^4, \quad xu'v + u(xv' - 2v) = 2x^4. \qquad (136.5)$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' - 2v = 0$. Решив это уравнение как уравнение с разделяющимися переменными, получим $v = cx^2$. В качестве функции $v(x)$ можно взять функцию $v(x) = x^2$ (**Функция $v(x)$ в (136.4) является одним из решений однородного уравнения, соответствующего заданному**). Осталось найти общее решение уравнения (136.5):

$$xu' \cdot x^2 = 2x^4, \quad x^3u' = 2x^4, \quad u' = 2x, \quad u = x^2 + C.$$

Выражения для функций $u(x)$ и $v(x)$ подставляем в (136.4). В результате получим все решения заданного уравнения (136.1).

Ответ: $\boxed{y = Cx^2 + x^4, \quad C \in R.}$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy = \left(2y + 2x^4\right)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

№ 137 [Ф]: $(2x+1)y' = 4x + 2y.$ (137.1)

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(2x+1)y' = 2y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1}, \quad y = C(2x+1), \quad C \in R.$$

(при разделении переменных решение $y \equiv 0$ не потеряно !).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y = C(x)(2x+1). \qquad (137.2)$$

Имеем

$$(2x+1)\big(C'(x)(2x+1)+2C(x)\big)=4x+2C(x)(2x+1),$$

$$C'(2x+1)^2=4x,\quad C'(x)=\frac{4x}{(2x+1)^2},\quad C'(x)=\frac{2(2x+1)-2}{(2x+1)^2},$$

$$C'(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{(2x+1)^2},\qquad C(x)=\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C_1,\ C_1\in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (137.2). В результате найдем решение заданного уравнения.

Ответ: $\boxed{y=(2x+1)(C+\ln|2x+1|)+1,\quad C\in R.}$

Замечание. Если заданное уравнение записать в виде:

$$(2x+1)dy=(4x+2y)dx.$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x\equiv -{}^1/_2$.

Домашнее задание

[Ф] №№ 139, 140, 141, 144.

07.11.2025

Занятие № 11

Линейные уравнения 1-го порядка

№ 138 [Ф]: $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sec x.$ (138.1)

Для соответствующего однородного имеем

$$y'+y\,\mathrm{tg}\,x=0,\quad \frac{dy}{y}=-\mathrm{tg}x\,dx,\quad \ln|y|=\ln|\cos x|+\ln|C|,\quad y=C\cos x.$$

(при разделении переменных решение $y\equiv 0$ не будет потеряно, если $C\in R$!).

Применим метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение заданного уравнения в виде:

$$y = C(x)\cos x. \qquad (138.2)$$

Имеем

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}, \qquad C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C(x) = \mathrm{tg}\,x + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Полученное для $C(x)$ выражение подставляем в (138.2). В результате найдем решение заданного уравнения

$$y = (\mathrm{tg}\,x + C_1)\cos x = \sin x + C_1\cos x.$$

№ 138 [Ф]: $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x.$ (138.1)

2 способ (*метод интегрирующего множителя*). Умножая обе части уравнения (138.1) на $\dfrac{1}{\cos x}$, получим

$$\frac{1}{\cos x}y' + y\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y\cdot\frac{1}{\cos x} = \mathrm{tg}\,x + C, \quad y = \sin x + C\cos x, \quad C \in R.$$

Ответ: $\boxed{y = \sin x + C\cos x, \quad C \in R.}$

№ 142 [Ф]: $2x(x^2 + y)dx = dy.$ (142.1)

Уравнение является линейным относительно переменной y и равносильно следующему

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 2x^3. \qquad (142.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ имеет решение $y = Ce^{x^2}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$2xe^{x^2}C(x)+e^{x^2}C'(x)=2xC(x)e^{x^2}+2x^3, \quad C'(x)=2x^3e^{-x^2},$$

$$C(x)=-e^{-x^2}(x^2+1)+C_1, \quad C_1\in R.$$

Следовательно, $y=C(x)e^{x^2}=(-e^{-x^2}(x^2+1)+C_1)e^{x^2}=C_1e^{x^2}-x^2-1.$

Ответ: $\boxed{y=Ce^{x^2}-x^2-1, \quad C\in R.}$ (рис. 1).

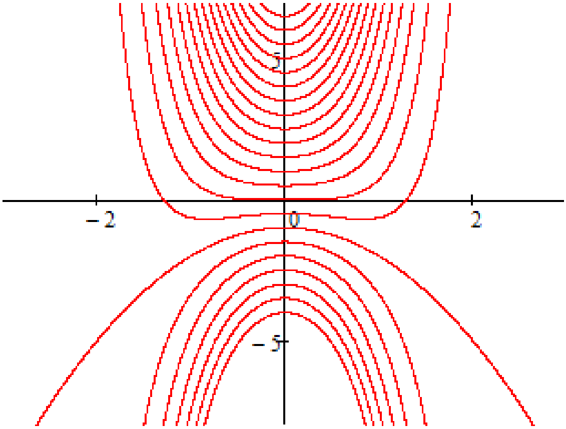

Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (142.1).

№ 145 [Ф]: $(x+y^2)dy=ydx.$ (145.1)

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Однако оно линейное относительно x. Заметим, что $\boxed{y\equiv 0}$ является решением уравнения. Для поиска других решений будем считать x функцией y. Считая $dy\neq 0$, имеем

$$y\frac{dx}{dy}=x+y^2. \qquad (145.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $y\dfrac{dx}{dy}=x$ имеет решение $x=Cy$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\big(C'(y)y + C(y)\big) = C(y)y + y^2, \quad C'(y)y^2 = y^2,$$

$$C'(y) = 1, \quad C(y) = y + C_1, \; C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y = (y + C_1)y = y^2 + C_1 y.$

Ответ: $\boxed{x = y^2 + Cy, \quad C \in R; \quad y = 0.}$ (рис. 2).

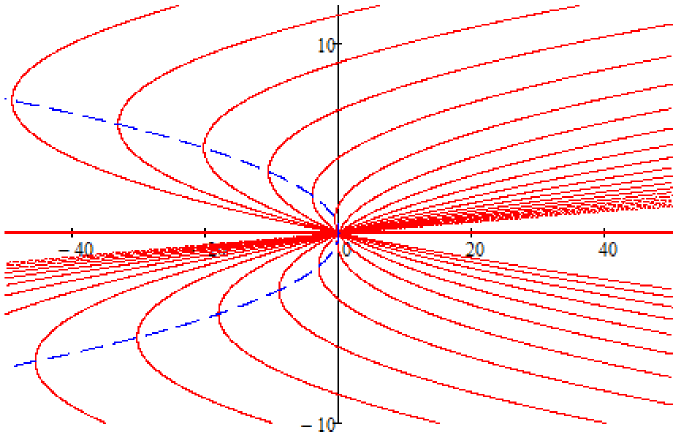

Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (145.1).

Геометрическое место вершин парабол-интегральных кривых $\left(-\dfrac{C^2}{4}, -\dfrac{C}{2}\right)$ –

это парабола $x = -y^2$ (пунктирная линия)

Домашнее задание

[Ф] № 146, 301.

13.11.2025

Занятие № 12

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним

№ 148 [Ф]: $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y\, dy.$ (148.1)

Условие $y > 0$ определяет область определения уравнения. Уравнение не является линейным относительно переменной y. Однако оно линейное относительно x. Имеем

$$ydx = (2x + y - 4\ln y)dy, \quad y\frac{dx}{dy} = 2x + y - 4\ln y. \qquad (148.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $y\frac{dx}{dy} = 2x$ имеет решение $x = Cy.^2$ Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\left(C'(y)y^2 + 2yC(y)\right) = 2C(y)y^2 + y - 4\ln y, \; y^3C'(y) = y - 4\ln y,$$

$$C'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{4\ln y}{y^3}, \qquad C(y) = -\frac{1}{y} - 4\int\frac{\ln y}{y^3}dy + C_1, \; C_1 \in R.$$

Так как

$$4\int\frac{\ln y}{y^3}dy = -2\int\ln y\, d\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2\ln y}{y^2} + 2\int\frac{dy}{y^3} = -\frac{2\ln y + 1}{y^2},$$

то

$$C(y) = \frac{2\ln y + 1}{y^2} - \frac{1}{y} + C_1, \; C_1 \in R.$$

Следовательно, $x = C(y)y^2 = 2\ln y + 1 - y + C_1y^2, \quad C_1 \in R.$

Ответ: $\boxed{x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2, \quad C \in R.}$

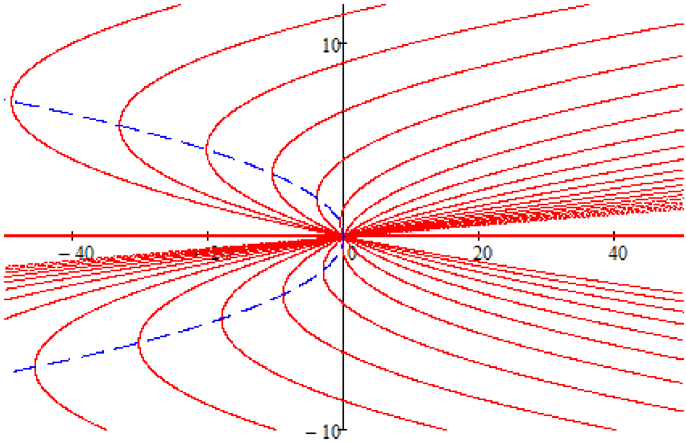

Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (145.1).

Геометрическое место вершин парабол-нтегральных кривых $\left(-\frac{C^2}{4}, -\frac{C}{2}\right)$ –

это парабола $x = -y^2$ (пунктирная линия)

№ 149 [Ф]: $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$. (149.1)

Уравнение не является линейным относительно переменной y. Заметим, что $\boxed{y \equiv 0}$ является решением уравнения, а для поиска других решений рассмотрим «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y}, \qquad (149.1)$$

которое является линейным относительно x. Соответствующее однородное уравнение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3x}{y}$ имеет решение $x = Cy^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)x^3+3x^2C(y)=\frac{3C(y)y^3-y^2}{y},\quad C'(y)y^3=-y,$$

$$C(y)=-\frac{1}{y^2},\quad C(y)=\frac{1}{y}+C_1,\ C_1\in R.$$

Следовательно, $x=C(y)y^3=\left(\frac{1}{y}+C_1\right)y^3=y^2+C_1y^3.$

Ответ: $\boxed{x=y^2+Cy^3,\ \ C\in R;\ \ y=0.}$

Уравнение Бернулли

$$y'=a(x)y+b(x)y^m,\quad b(x)\neq 0,\quad m\neq 0{,}1,$$

с помощью замены $z=y^{1-m}$ приводится к линейному

$$z'=(1-m)\big(a(x)z+b(x)\big).$$

При $m>0$ следует учесть, что $\boldsymbol{y=0}$ является решением уравнения Бернулли.

№ 151 [Ф]: $y'+2y=y^2e^x.$ (151.1)

Уравнение является уравнением Бернулли (m = 2). Его решения, отличные от $\boxed{y\equiv 0}$, найдем следующим образом. Разделив обе части уравнения (151.1) на y^2, получим

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{y}=e^x. \tag{151.2}$$

Так как $\frac{y'}{y^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)$, то, выполнив в уравнении (151.2) замену $z=\frac{1}{y}$, получим

$$z'-2z=-e^x. \tag{151.3}$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным. Соответствующее однородное уравнение $z'-2z=0$ имеет решение $z=Ce^{2x}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(x)e^{2x}+2C(x)e^{2x}-2C(x)e^{2x}=-e^{x},\quad C'(x)=-e^{-x},$$

$$C(x)=e^{-x}+C_1,\quad C_1\in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (151.3) является:

$$z=C(x)e^{x}=(e^{-x}+C_1)e^{2x}=e^{x}+C_1e^{2x}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{y}=e^{x}+Ce^{2x},\quad y(e^{x}+Ce^{2x})=1,\quad C\in R.$$

Ответ: $\boxed{y(e^{x}+Ce^{2x})=1,\quad C\in R;\quad y=0.}$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **146, 147, 306, 152**.

20.11.2025

Занятие № 13

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения, приводящиеся к ним

№ 154 [Ф]: $xy^2y'=x^2+y^3.$ (154.1)

Так как $y^2y'=\dfrac{dy^3}{dx}\cdot\dfrac{1}{3}$, то выполнив в уравнении замену $z=y^3$, получим

$$xz'=3(x^2+z).\qquad (154.2)$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным. Соответствующее однородное уравнение $xz'=3z$ имеет решение

$z = Cx^3$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(C'(x)x^3 + 3x^2C(x)) = 3x^2 + 3C(x)x^3, \quad C'(x)x^4 = 3x^2,$$

$$C'(x) = \frac{3}{x^2}, \quad C(x) = -\frac{3}{x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Общим решением уравнения (154.2) будет

$$z = C(x)x^3 = \left(-\frac{3}{x} + C_1\right)x^3 = C_1x_3 - 3x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим ответ.

Ответ: $\boxed{y^3 = Cx^3 - 3x^2, \quad C \in R.}$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xy^2dy = (x^2 + y^3)dx,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x \equiv 0$.

Замечание 2. Уравнение (154.1) является уравнением Бернулли. Действительно, $xy^2y' = x^2 + y^3 \;\Rightarrow\; xy' = \dfrac{x^2}{y^2} + y$. При этом $m = -2$.

№ 157 [Ф]: $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$ (157.1)

Уравнение является уравнением Бернулли (m = 3). Очевидно, $\boxed{y \equiv 0}$ является его решением. Остальные решения будем искать следующим образом. Разделив обе части уравнения (157.1) на y^3, получим

$$x \cdot \frac{y'}{y^3} + \frac{2}{y^2} + x^5e^x = 0. \qquad (157.2)$$

Так как $\dfrac{y'}{y^3} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$, то, выполнив в уравнении (157.2) замену $z = \dfrac{1}{y^2}$, получим линейное уравнение

$$xz' - 4z = 2x^5e^x. \qquad (157.3)$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения $xz'-4z=0$ является $z=Cx^4$. Решая уравнение (157.3) методом вариации, будем иметь

$$x(C'(x)x^4+4x^3C(x))-4C(x)x^4=2x^5e^x, \quad C'(x)x^5=x^5e^x,$$

$$C'(x)=2e^x, \quad C(x)=2e^x+C_1, \quad C_1\in R.$$

Тогда

$$z=C(x)x^4=C_1x^4+2x^4e^x, \; C_1\in R,$$

является общим решением уравнения (157.3).

Выполнив обратную замену:

$$\frac{1}{y^2}=(C_1+2e^x)x^4,$$

получим решение заданного уравнения (157.1).

Ответ: $\boxed{y^2x^4(2e^x+C)=1, \quad C\in R; \quad y=0.}$

Замечание 1. Если заданное уравнение записать в виде:

$$xdy+(2y+x^5y^3e^x)dx=0,$$

то нетрудно установить, что его решением будет и функция $x\equiv 0$.

№ 159 [Ф]: $y'x^3\sin y=xy'-2y.$ (159.1)

Очевидно, $\boxed{y=0}$, является решением уравнения. Для поиска других решений преобразуем уравнение следующим образом. Разделив обе части уравнения на $y'\neq 0$, получим уравнение

$$2y\frac{dx}{dy}-x=-x^3\sin y, \tag{159.2}$$

которое является уравнением Бернулли. Заметим, что оно имеет решение $x=0$, но оно **не является** решением заданного уравнения (159.1). Для поиска отличных от нуля решений разделим обе части уравнения (159.2) на x^2 и выполним замену $x^{-2}=z(y)$. В результате получим линейное неоднородное уравнение

$$yz'+z=\sin y. \qquad (159.3)$$

Соответствующее однородное уравнение $yz'+z=0$ имеет решение $z=\dfrac{C}{y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$y\left(\frac{C'(y)}{y}-\frac{C(y)}{y^2}\right)+\frac{C(y)}{y}=\sin y, \quad C'(x)=\sin y,$$

$$C(x)=C_1-\cos y, \quad C_1\in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (159.3) является:

$$z=\frac{C(y)}{y}=\frac{C_1}{y}-\frac{\cos y}{y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\frac{1}{x^2}=\frac{C_1}{y}-\frac{\cos y}{y}, \quad x^2(C_1-\cos y)=y.$$

Ответ: $\boxed{x^2(C-\cos y)=y, \quad C\in R; \quad y=0.}$

№ 161 [Ф]: $xdx=(x^2-2y+1)dy.$ (161.1)

Выполнив замену $x^2=z(y)$, получим линейное уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}=z-2y+1 \iff \frac{dz}{dy}=2z-2(2y-1). \qquad (161.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $z'=2z$ имеет решение $z=Ce^{2y}$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(y)e^{2y}+2C(y)e^{2y}=2C(y)e^{2y}-2(2y-1), \quad C'(y)=-2(2y-1)e^{-2y},$$

$$C(y)=\int(2y-1)d(e^{-2y})+C_1, \quad C(y)=2ye^{-2y}+C_1, \quad C_1\in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (161.2) является:

$$z = C(y)e^{2y} = 2y + C_1 e^{2y}.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{x^2 = Ce^{2y} + 2y, \quad C \in R.}$

Замечание. Уравнение (161.2) может быть приведено к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $2z - 4y + 2 = u(y)$. См. занятие № 2

Домашнее задание

[Ф] №№ 153, 155, 172, 303, 305, 320.

04.21.2025

Занятие № 14
Уравнения Бернулли и уравнения Риккати

№ 162 [Ф]: $(x+1)(yy'-1) = y^2$ (162.1)

Выполнив замену $y^2 = z(x)$, получим линейное уравнение

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}z'-1\right) = z \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)z' = 2z + 2(x+1). \tag{162.2}$$

Соответствующее однородное уравнение $(x+1)z' = 2z$ имеет решение $z = C(x+1)^2$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$C'(x)(x+1)^3 + 2C(x)(x+1)^2 = 2C(x)(x+1)^2 + 2(x+1),$$

$$C'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, \qquad C(x) = \int \frac{2dx}{(x+1)^2} + C = -\frac{2}{x+1} + C.$$

Следовательно, общим решением уравнения (162.2) является:

$$z = C(x)(x+1)^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1).$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1).}$

№ 163 [Ф]: $x(e^y - y') = 2.$ (163.1)

Так как

$$e^y - y' = e^y(1 - e^{-y}y') = e^y(1 + (e^{-y})'),$$

то, выполнив в уравнении (163.1) замену $e^{-y} = z(x)$, получим линейное уравнение

$$x(1 + z') = 2z. \qquad (163.2)$$

Соответствующее однородное уравнение $xz' = 2z$ имеет решение $z = Cx^2$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим:

$$x(1 + C'(x)x^2 + 2xC(x)) = 2C(x)x^2, \quad x^3C'(x) = -x,$$

$$C'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad C(x) = \frac{1}{x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, общим решением уравнения (163.2) является:

$$z = C(x)x^2 = x + C_1x^2.$$

Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{e^{-y} = x + Cx^2, \quad C \in R.}$

Уравнение Рикка́ти

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x),$$

в случае, если известно его некоторое частное решение y_*, может быть приведено к уравнению Бернулли заменой $y = z + y^*$.

Не существует общего метода нахождения частного решения y^*. Иногда частное решение удается найти исходя из вида свободного члена уравнения $c(x)$. Например, для уравнения Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}\cdot y + \frac{C}{x^2},$$

где A, B и C – вещественные постоянные (причем $(B+1)^2 \geq 4AC$) частное решение можно найти в виде $y^* = \dfrac{a}{x}$.

А для уравнения вида $y' + \sigma y^2 = Ax^2 + Bx + C$, где σ, A, B и C – вещественные постоянные, в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять $y = ax + b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, получим систему уравнений для нахождения a и b. Если такая система будет иметь решение, то частное решение вида $y^* = ax + b$ существует.

№ 167 [Ф]: $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4.$ (167.1)

Поделив обе части уравнения на x^2, получим

$$y' + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{4}{x^2}. \qquad (167.2)$$

Это уравнение Риккати. Его общее решение можно найти, зная хотя бы одно частное решение. Попытаемся искать его в виде $y_* = \dfrac{a}{x}$.

Подставляя y_* в уравнение (167.2), будем иметь:

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad a^2 = 4, \quad a = \pm 2.$$

Таким образом, получили два частных решения уравнения (167.2): $y = \dfrac{2}{x}$ и $y = -\dfrac{2}{x}$. Для преобразования уравнения (167.2) возьмем первое из них. Замена $y = z + \dfrac{2}{x}$ приводит уравнение (167.2) к уравнению

$$z' - \frac{2}{x^2} + \frac{z}{x} + \frac{2}{x^2} + z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad z' + \frac{5z}{x} + z^2 = 0 \qquad (167.3)$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли.

$$z' + \frac{5z}{x} + z^2 = 0 \quad \Big/ \quad \frac{1}{z^2}$$

$z = 0$ - реш.

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{5}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1 = 0, \quad \exists\, u = \frac{1}{z}$$

$$u' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$-u' + \frac{5}{x} \cdot u + 1 = 0 \longrightarrow u' = \frac{5}{x} u + 1 \qquad (1)$$

а) $u' = \frac{5}{x} u \qquad \frac{du}{u} = \frac{5dx}{x} \qquad \ln|u| = \ln|x^5| + \ln|C|$

$$u = Cx^5$$

б) $u = C(x) \cdot x^5 \quad (2)$

$(2) \to (1) \Rightarrow \quad C'(x)x^5 + 5x^4 C(x) = 5x^4 C(x) + 1$

$$C'(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$C(x) = -\frac{1}{4x^4} + \tilde{C} \to (2)$$

$$u = Cx^5 - \frac{x}{4}$$

$$\| $$

$$\frac{1}{z} \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{1}{Cx^5 - \frac{x}{4}}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ z = \dfrac{4}{4Cx^5 - x} \end{array}\right| \longrightarrow y = z + \frac{2}{x} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y = \dfrac{2}{x} \\ y = \dfrac{4}{4Cx^5 - x} + \dfrac{2}{x} \end{array}\right.$$

$$\left(C = 0 \longrightarrow y = -\frac{2}{x}\right)!$$

Ответ: $\boxed{y=\frac{2}{x};\quad y=\frac{2}{x}+\frac{4}{Cx^5-x},\quad C\in R.}$

№ 307 [М]: $y'=y^2-xy-x.$ (1)

Будем искать частное решение уравнения (1) в виде

$$y^*=ax+b\ . \qquad (*)$$

Для определения коэффициентов a и b подставим y^* в уравнение (1). Будем иметь:

$$a=a^2x^2+2abx+b^2-ax^2-bx-x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a=a(a-1)x^2+(2ab-b-1)x+b^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства, получим:

$$\begin{cases} a(a-1)=0, \\ 2ab-b-1=0, \\ a=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1, \\ b=1. \end{cases}$$

Следовательно, нашли частное решение заданного уравнения в виде (*):

$$y^*=x+1.$$

Замена

$$y=z+x+1 \qquad (2)$$

приводит уравнение (1) к уравнению

$$z'+1=(z+x+1)^2-x(z+x+1)-x,\quad z'=z^2+(x+2)z. \qquad (3)$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли. Заметим, что $\boxed{z=0}$ является его решением. Другие решения найдем, приведя уравнение (3) с помощью замены $u=\dfrac{1}{z}$ к линейному

$$u'=-(x+2)u-1. \qquad (4)$$

Уравнение (4) решим методом вариации произвольной постоянной:

а) $u' = -(x+2)$ $\quad \frac{du}{u} = -(x+2)\,dx$

$\ln|u| = -\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) + \ln|C| \longrightarrow u = C\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)}$

б) $u = C(x)\, e^{-\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)}$ $\quad (5)$

$(5) \to (4) \Rightarrow \quad C'(x)\, e^{-\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)} = -1$

$$C'(x) = -e^{\frac{x^2}{2}+2x}$$

$$C(x) = -\int e^{\frac{x^2}{2}+2x}\,dx + \tilde{C} \to (5)$$

$$u = e^{-\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)}\left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}+2x}\,dx\right)$$

$$\| \quad \frac{1}{z}$$

$$z = \frac{e^{\frac{x^2}{2}+2x}}{C - \int e^{\frac{x^2}{2}+2x}\,dx} \qquad (6)$$

$z = 0 \longrightarrow (2) \longrightarrow$ Ответ

$(6) \longrightarrow (2)$

Возвращаясь к замене (2), получим ответ.

Ответ: $\boxed{y = x+1; \quad y = \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}+2x}}{C - \int e^{\frac{x^2}{2}+2x}dx} + x + 1, \quad C \in R.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 164, 168, 169, 170.