[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

[Занятие № 1]

04.09.2025

Занятие № 1

Составление дифференциальных уравнений семейства кривых

> Для того чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства
>
> $$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \qquad (*)$$
>
> где C_i, $(i = \overline{1, n})$ - произвольные постоянные принадлежащие некоторой области **C**, следует:
>
> 1) n раз продифференцировать равенство (*), считая y n раз непрерывно дифференцируемой функцией переменной x.
> 2) из получившихся соотношений и (*) исключить произвольные постоянные C_1, C_2, …, C_n.

№ 17 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $y = e^{Cx}$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Пусть y(x) = непрерывно дифференцируемое решение уравнения:

$$y = e^{Cx}, \tag{1}$$

Дифференцируя равенство (1) по переменной x, получим

$$y' = Ce^{Cx} \quad \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad y' = Cy. \tag{2}$$

Выразим C из (2):

$$C = \frac{y'}{y} \qquad (y \neq 0).$$

Подставив полученное выражение в (1), получим дифференциальное уравнение

$$y = e^{xy'/y} \quad \text{или} \quad y \ln y = xy'.$$

№ 21 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $x^2 + Cy^2 = 2y$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Дифференцируя равенство

$$x^2 + Cy^2 = 2y, \tag{1}$$

по переменной x, получим

$$2x + 2Cyy' = 2y', \quad Cyy' = y' - x.$$

Выразим C из последнего равенства

$$C = \frac{y' - x}{yy'} \qquad (yy' \neq 0)$$

и подставим его в (1). В результате получим дифференциальное уравнение:

$$x^2 + \frac{y' - x}{yy'} y^2 = 2y \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - y)y' - xy = 0.$$

№ 27 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $\ln y = ax + by$, где a, b – произвольные вещественные постоянные.

Дважды дифференцируя равенство

$$\ln y = ax + by, \tag{1}$$

по переменной x, получим

$$\frac{y'}{y} = a + by', \tag{2}$$

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = by''. \tag{3}$$

Из (2) и (3) найдем

$$b = \frac{y''y - y'^2}{y^2 y''}, \qquad a = \frac{y'^3}{y^2 y''} \qquad (yy'' \neq 0),$$

которые и подставим в (1). В результате получим дифференциальное уравнений

$$\ln y = \frac{y'^3}{y^2 y''} x + \frac{y''y - y'^2}{y^2 y''} y \quad \Leftrightarrow \quad y^2 y''(\ln y - 1) = y'^2 (y'x - y).$$

№ 30 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

Согласно условию, если C – абсцисса центра окружности, то $2C$ - его ордината. Уравнение окружностей радиуса 1 и с центром в точке (C, $2C$) имеет вид

$$(x - C)^2 + (y - 2C)^2 = 1. \tag{1}$$

Считая $y = y(x)$, продифференцируем равенство (1) по переменной x, получим

$$x - C + (y - 2C)y' = 0. \tag{2}$$

Из (2) выразим C:

$$C = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

и подставим в (1):

$$\left(x-\frac{x+yy'}{1+2y'}\right)^2+\left(y-2\cdot\frac{x+yy'}{1+2y'}\right)^2=1.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$(y-2x)^2(y'^2+1)=(1+2y')^2.$$

№ 31 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной Oy, и касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

Для параболы, которая имеет ось симметрии, параллельную оси Oy, и касается прямой $y = 0$ (это ось абсцисс Ox), вершина лежит на оси Ox. Общее уравнение семейства таких парабол имеет вид:

$$y=a(x-C)^2, \qquad (1)$$

где: C – абсцисса вершины параболы, произвольная величина*; a – коэффициент, который учитывает направление ветвей параболы и их отклонение от оси симметрии* (пока произвольная величина).

Установим связь между параметрами a и C, используя условие касания параболы (1) прямой $y = x$.

Домашнее задание

[**Ф**] № **21** (построить на плоскости xOy семейство кривых, задавая различные значения параметра C);

[**Ф**] №№ **18**, **20**, **26**, **32**.