[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

---

02.12.2024

Занятие № 13

Уравнения в полных дифференциалах

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах

Уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует функция $u(x, y)$, для которой $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = C, \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная. Будем считать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области D (односвязная область, в которой рассматривается уравнение). Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, является выполнение тождества

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{3}$$

Задача решения уравнения в полных дифференциалах сводится к классической задаче математического анализа о *восстановлении функции двух переменных по ее дифференциалу.* Т.е. следует найти функцию, для которой:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \qquad (4)$$

№ 186 [Ф]: $2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$ (186.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x,$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Следовательно, уравнение (186.1) является уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 - y^2. \qquad (186.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y) = x^2 y + \varphi(y), \qquad (186.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (186.3) во второе условие системы (186.2), будем иметь

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2. \qquad (186.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c,$$

где c – произвольная постоянная. Однако, при нахождении функции $\varphi(y)$ можно полагать $c = 0$. Итак, получили

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3,$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = C \quad \text{или} \quad 3x^2 y - y^3 = C, \quad C \in R.}$

№ 190 [Ф]: $$\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0. \qquad (190.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{6x^2}{y^3}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{6x^2}{y^3},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{3x^2+y^2}{y^2}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \qquad (190.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\varphi(y), \qquad (190.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (190.3) во второе условие (190.2), будем иметь

$$-\frac{2x^3}{y^3}+\varphi'(y)=-\frac{2x^3+5y}{y^3}. \qquad (190.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=-\frac{5}{y^2}, \quad \varphi(y)=\frac{5}{y}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая c = 0, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (190.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+x+\frac{5}{y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C.}$

№ 191 [Ф]: $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$ (191.1)

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},\qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right),\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}. \tag{191.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\varphi(y), \tag{191.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3) во второе условие (191.2), будем иметь

$$-\sqrt{x^2-y}+\varphi'(y)=-\sqrt{x^2-y}. \tag{191.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=0,\quad \varphi(y)=c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c=0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (191.3). В результате получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Замечание. Если интегрировать по y второе уравнение системы (191.2), то получим:

$$u(x,y)=\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\psi(x), \tag{191.3'}$$

где функция $\psi(x)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3') в первое уравнение системы (191.2), будем иметь

$$2x\sqrt{x^2-y}+\psi'(x)=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right). \qquad (191.4')$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\psi(x)$:

$$\psi'(y)=2x, \qquad \psi(x)=x^2+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\psi(x)$ выражение в (191.3'). В результате получим

$$u(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}=C.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ **187, 189, 193**.

Выполнить задания 1–4 примерного варианта Контрольной работы № 1 (часть 2) **«Интегрирование уравнений линейных, в полных дифференциалах, уравнений Бернулли и Риккати»**

09.12.2024

Занятие № 14

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

№ 194 [Ф]: $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0. \qquad (194.1)$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{x\cos y}{\sin^2 y}, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{2x\cos y}{\cos 2y - 1} = -\frac{x\cos y}{\sin^2 y},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{x}{\sin y} + 2, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1} = -\dfrac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}. \end{cases} \tag{194.2}$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \varphi(y), \tag{194.3}$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (194.3) во второе условие (194.2), будем иметь

$$-\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y} + \varphi'(y) = -\frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}. \tag{194.4}$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -\frac{\cos y}{2\sin^2 y}, \quad \varphi(y) = \frac{1}{2\sin y} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (194.3). В результате получим

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \frac{1}{2\sin y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $\boxed{\dfrac{x^2}{2\sin y} + 2x + \dfrac{1}{2\sin y} = C \quad \text{или} \quad x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y.}$

Пусть уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Дифференцируемая функция $\mu = \mu(x, y) \neq 0,$ после умножения на которую уравнение (1) становится уравнением в полных дифференциалах, называется **интегрирующим множителем** этого уравнения. Чтобы уравнение

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial[\mu P(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu Q(x, y)]}{\partial x}. \tag{3}$$

Соотношение (3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\mu(x, y)$. Это уравнение является линейным уравнением с частными производными первого порядка, которое можно записать в виде

$$Q(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - P(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда достаточно легко найти решение уравнения (4), а, следовательно, и интегрирующий множитель уравнения (1).

Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель вида $\mu(x, y) = \mu(\omega(x, y)),$ где $\omega(x, y)$ - известная функция, если дробь

$$\frac{\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P \cdot \dfrac{\partial \omega}{\partial y}}$$

является функций от $\omega(x, y)$, т.е.

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-P\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}=f(\omega(x,y)). \qquad (5)$$

Тогда для нахождения интегрирующего множителя получим уравнение[1]:

$$\frac{d\mu}{d\omega}=\mu(\omega)\cdot f(\omega),$$

которое имеет решение

$$\mu(\omega)=C\cdot e^{\int f(\omega)d\omega}. \qquad (6)$$

Полагая, C = 1, получим интегрирующий множитель уравнения (1).
В частности,

если выполнено условие,	то интегрирующий множитель является функцией
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=f(x)$	$\mu=\mu(x)$
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=f(y)$	$\mu=\mu(y)$
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q-P}=f(x+y)$	$\mu=\mu(x+y)$

---

[1] Следует из (4), так как по правилу дифференцирования сложной функции имеем: $\dfrac{\partial\mu(\omega(x,y))}{\partial x}=\dfrac{d\mu}{d\omega}\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\mu(\omega(x,y))}{\partial y}=\dfrac{d\mu}{d\omega}\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$.

$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=f(xy)$	$\mu=\mu(xy)$

Необходимо следить за тем, чтобы умножение уравнения (1) на интегрирующий множитель не приводило к потере решений и появлению посторонних решений.

№ 354 [М]: $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)dy=0.$ (354.1)

Уравнение определено при $y\neq 0$ и не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+1\right)=-\frac{x}{y^2}\neq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}-1\right)=\frac{1}{y}.$$

В этом случае

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{-P}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)\cdot\frac{1}{-\left(\dfrac{x}{y}+1\right)}=\frac{1}{y}=f(y).$$

Следовательно, интегрирующий множитель является функцией y и находится по формуле (6):

$$\mu(y)=Ce^{\int\frac{1}{y}dy}=C\,|\,y\,|.$$

Уравнение определено в совокупности полуплоскостей $y>0$ и $y<0$. В полуплоскости $y>0$ удобно взять $C=1$, а в полуплоскости $y<0$ $C=-1$. Тогда для обеих полуплоскостей $\mu(y)=y.$ После умножения на этот множитель уравнение (354.1) примет вид

$$(x+y)dx+(x-y)dy=0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = x + y, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x - y. \tag{354.2}$$

Из первого равенства найдем

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y). \tag{354.3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства (354.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = -y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (354.3). В результате получим

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + 2xy = C.$$

Ответ: $\boxed{x^2 - y^2 + 2xy = C.}$

Замечание. Уравнение (354.1) является однородным уравнением. С помощью замены $x = uy$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$(u+1)ydu + (u^2 + 2u - 1)dy = 0.$$

№ 355 [M]: $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$ (355.1)

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}=-\frac{2}{x},$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}.$$

Прежде, чем умножить заданное уравнение на $\mu(x)$, заметим, что $\boxed{x = 0}$ является решением уравнения (355.1). После умножения на интегрирующий множитель уравнение (355.1) примет вид

$$\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=1+\frac{y}{x^2},\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{1}{x}. \tag{355.2}$$

Из второго равенства найдем

$$u(x,y)=-\frac{y}{x}+\varphi(x). \tag{355.3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{y}{x^2}+\varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства (355.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

$$\varphi'(x)=1 \quad\Rightarrow\quad \varphi(x)=x+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (355.3). В результате получим

$$u(x,y)=x-\frac{y}{x}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$x - \frac{y}{x} = C$$

который с ранее выделенным решением $x = 0$ дает ответ.

Ответ: $\boxed{x - \frac{y}{x} = C; \quad x = 0.}$

Замечание. Уравнение (355.1) является линейным относительно y. При $dx \neq 0$ уравнение можно привести к виду $xy' = y + x^2$ и решить, например, с помощью метода Лагранжа (метода вариации произвольной величины).

Домашнее задание

[Матвеев] № 356:

$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$

[Матвеев] № 354 (решить как однородное уравнение),
[Матвеев] № 355 (решить как линейное уравнение),

[Матвеев] № 357:

$(xy^2 + y)dx - xdy = 0.$

16.12.2024

Занятие № 15

Обзорное занятие

№ 358 [М]: $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0.$ (358.1)

Здесь $P(x, y) = x\sin y + y\cos y, \quad Q(x, y) = x\cos y - y\sin y.$

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{Q} = (x\cos y + \cos y - y\sin y - \cos y) \cdot \frac{1}{x\cos y - y\sin y} = 1,$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x) = e^{\int 1dx} = e^x.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (358.1) примет вид

$$e^x(x\cos y - y\sin y)dy + e^x(x\sin y + y\cos y)dx$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y), \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y). \end{cases} \qquad (358.2)$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y) + \varphi(y). \qquad (358.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y) + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (358.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (358.3). В результате получим

$$u(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y).$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y) = C.$$

Ответ: $\boxed{e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) = C.}$

№ 195 [Ф]: $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$ (195.1)

1 способ. Здесь $P(x,y)=x^2+y^2+x,\ Q(x,y)=y.$ Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

Но так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}=2,$$

то существует интегрирующий множитель, который является функцией x и находится по формуле:

$$\mu(x)=e^{\int 2dx}=e^{2x}.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (195.1) примет вид

$$e^{2x}(x^2+y^2+x)dx+e^{2x}ydy=0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах[2]. Заметим, что так как $\mu(x)=e^{2x}\neq 0,$ то при преобразовании заданного уравнения не происходит потеря решений или приобретение посторонних решений. В результате будем иметь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=e^{2x}(x^2+y^2+x),\\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=e^{2x}y.\end{cases}\qquad(195.2)$$

Из второго равенства системы найдем

---

[2] Проверка: $\dfrac{\partial(e^{2x}(x^2+y^2+x))}{\partial y}=2ye^{2x},\quad \dfrac{\partial(e^{2x}y)}{\partial x}=2ye^{2x}.$

$$u(x,y)=\frac{e^{2x}y^2}{2}+\varphi(x). \qquad (195.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=e^{2x}y^2+\varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства системы (195.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

$$\varphi'(x)=e^{2x}(x^2+x), \quad \varphi'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(e^{2x}x^2\right)}{dx} \;\Rightarrow\; \varphi(x)=\frac{e^{2x}x^2}{2}+c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c=0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (195.3). В результате получим

$$u(x,y)=\frac{e^{2x}(x^2+y^2)}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^{2x}(x^2+y^2)=C. \qquad (195.4)$$

<u>2 способ</u>. Применим метод выделения полных дифференциалов. Для заданного уравнения имеем:

$$(x^2+y^2)dx+xdx+ydy=0, \quad 2(x^2+y^2)dx+d(x^2+y^2)=0,$$

$$2dx+\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0, \quad 2dx+d(\ln(x^2+y^2))=0,$$

$$d(2x+\ln(x^2+y^2))=0, \quad 2x+\ln(x^2+y^2)=C.$$

Полученный общий интеграл потенцированием приводится к виду (195.4).

Заметим, что точка $(x,y)=(0,0)$ является для заданного уравнения особой точкой, поэтому приведенные выше преобразования выполнены при условии $x^2+y^2\neq 0$.

Ответ: $\boxed{e^{2x}(x^2+y^2)=C.}$

№№ 198, 214

Домашнее задание

Выполнить задания примерного варианта Контрольной работы № 1 (часть2) **«Интегрирование уравнений линейных, в полных дифференциалах, уравнений Бернулли и Риккати»**

Контрольная работа – 23.12.2024