[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

Занятие № 6 | № 7 | № 8

07.10.2024

Занятие № 6

№ 82 [Ф]: Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Обозначим:

$x(t)$ – температура куска металла через t минут после помещения в печь;

$y(t)$ – температура печи через t минут после начала повышения температуры.

Для $y(t)$ имеем:

$$y(t) = \alpha t + \beta, \;\; y(0) = a, \; y(60) = b \;\; \Rightarrow \;\; y(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot t.$$

Тогда для $x(t)$ будем иметь:

$$\begin{cases} x'(t) = k(y(t) - x(t)), \\ y(t) = a + \dfrac{b-a}{60} \cdot t, \\ x(0) = a. \end{cases} \qquad (1)$$

Задача (1) имеет решение $x(t) = a + \dfrac{b-a}{60} \cdot \left(t - \dfrac{1-e^{-kt}}{k} \right)$.

Тогда $x(60) = b - \dfrac{b-a}{60k}(1 - e^{-60k})$.

Однородные уравнения

Интегрирование однородных уравнений

Определение 1. Функция $\mathrm{F}(x, y)$ называется ***однородной***, если $\forall\ \lambda > 0$ справедливо тождество $\mathrm{F}(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k\ \mathrm{F}(x, y)$. Число k называют ***порядком*** (или ***степенью***) однородной функции.

Примеры

$\dfrac{x}{y}, \quad \dfrac{x+2y}{3x-y}, \quad \dfrac{x^2+4y^2}{x^2}$	– однородные функции нулевого порядка, k = 0
$x+y, \quad \dfrac{2x^2-y^2}{x+2y}, \quad \dfrac{3xy}{x-5y}$	– однородные функции порядка k = 1
$x^2-4xy, \quad \dfrac{2x^3-2xy^2}{x+y}$	– однородные функции порядка k = 2

Определение 2. Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \qquad (1)$$

в котором правая часть $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка, называют ***однородным***.

Уравнение в дифференциалах

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

будет ***однородным***, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными одного и того же порядка.

При $x \neq 0$, полагая $\lambda = \frac{1}{x}$, уравнение (1) приводится к виду

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right),} \qquad (1')$$

а уравнение (2) – к виду:

$$\boxed{m\left(\frac{y}{x}\right)dx + n\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.} \qquad (2')$$

Здесь $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad m\left(\frac{y}{x}\right) = M\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad n\left(\frac{y}{x}\right) = N\left(1, \frac{y}{x}\right).$

Уравнения (1') и (2') с помощью замены

$$\boxed{z = \frac{y}{x}} \qquad \text{(т.е. } y = zx\text{)} \qquad (3)$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Действительно. Так как $y' = z + xz'$, то уравнение (1') при замене (3) приводится к виду:

$$z + xz' = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad xz' = g(z) - z. \qquad (4)$$

Так как $dy = zdx + xdz$, то уравнение (2') при замене (3) приводится к виду

$$m(z)dx + n(z)(zdx + xdz) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\big(m(z) + zn(z)\big)dx + xn(z)dz = 0. \qquad (5)$$

(4) и (5) – уравнения с разделяющимися переменными.

№ 101 [Ф]: $(x + 2y)dx - xdy = 0.$ (101.1)

Уравнение (101.1) является однородным, так как для функций $M(x,y) = x + 2y$ и $N(x,y) = -x$ имеем

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + 2\lambda y = \lambda(x + 2y) = \lambda(x + 2y) = \lambda M(x,y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x = \lambda N(x, y).$$

Функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ – однородные 1-го порядка.
Легко установить, что $\boxed{x = 0}$ является решением заданного уравнения.
Поделив уравнение (101.1) на x, получим

$$\left(1 + \frac{2y}{x}\right)dx - dy = 0. \qquad (101.2)$$

Замена $y = zx$ в полученном уравнении дает:

$$(1 + 2z)dx - (zdx + xdz) = 0 \iff (1 + z)dx - xdz = 0. \qquad (101.3)$$

Одним из решений уравнения (101.3) является $\boxed{z = -1}$.
Найдем остальные решения уравнения (101.3). Разделив переменные в уравнении (101.3), будем иметь

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \ln|1+z| = \ln|x| + C, \ C \in \mathrm{R}.$$

Полученный общий интеграл уравнения (101.3) можно преобразовать следующим образом:

$$|1+z| = e^C |x|, \ C \in R \iff 1 + z = Cx, \ C \in R \setminus \{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (101.3) будет

$$\boxed{z = Cx - 1, \ C \in R.} \qquad (101.4)$$

(решение $z = -1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (101.4), получим общее решение уравнения (101.2).

Ответ:

$$\boxed{\begin{aligned} &x = 0, \\ &y = x(Cx - 1), \quad C \in R. \end{aligned}}$$

№ 103 [Ф]: $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$ (103.1)

Функции $M(x, y) = y^2 - 2xy$ и $N(x, y) = x^2$ являются однородными порядка 2. Следовательно, заданное уравнение – однородное.

Одним из решений уравнения (103.1) является $\boxed{x = 0}$.

При $x \neq 0$ поделив уравнение (103.1), получим:

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0. \qquad (103.2)$$

Выполнив замену $y = zx$, будем иметь:

$$(z^2 - 2z)dx + xdz + zdx = 0, \qquad z(z-1)dx + xdz = 0. \qquad (103.3)$$

Очевидно, $\boxed{z = 0}$ и $\boxed{z = 1}$ являются решениями уравнения (103.3). Разделяя переменные в (103.3), найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{z(z-1)} = -\frac{dx}{x}, \qquad \int\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = -\int\frac{1}{x}dx + \ln|C|, \quad C \in R\setminus\{0\},$$

$$\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| = -\ln|x| + \ln|C|, \qquad \frac{z-1}{z} = \frac{C}{x}, \; C \in R\setminus\{0\}.$$

Получили все решения уравнения (103.3):

$$z = 0, \qquad \frac{1}{z} = 1 - \frac{C}{x}, \quad C \in R. \qquad (103.4)$$

(решение $z = 1$ получается при $C = 0$)

Выполнив обратную замену в (103.4), получим все решения уравнения (103.2):

$$y = 0, \qquad x^2 = y(x - C), \quad C \in R.$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ x^2 = y(x-C), \quad C \in R. \end{array}}$$

№ 107 [Ф]: $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$. (107.1)

Заметим, что $x \neq 0$. При этом уравнение (107.1) можно привести к виду:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}. \qquad (107.2)$$

Уравнение (107.2) является однородным. Выполним в нем замену $y = zx$. В результате получим

$$z + xz' = z + \operatorname{tg} z, \qquad xz' = \operatorname{tg} z. \qquad (107.3)$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} z = 0$, найдем решения уравнения (107.3)

$$\boxed{z = \pi k,\ k \in Z,}$$

которые можем потерять при разделении переменных:

$$x\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z, \qquad \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \int \frac{dx}{x} + C,\ C \in R,$$

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + \ln|C|, \quad C \in R \setminus \{0\},$$

$$\sin z = Cx, \quad C \in R \setminus \{0\}.$$

Так как $\sin z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pi k,\ k \in Z,$ то общим решением уравнения (107.3) является следующее $\sin z = Cx, \quad C \in R.$ Выполнив обратную замену, получим

Ответ: $\boxed{\sin\frac{y}{x} = Cx, \quad C \in R.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 102, 104, 108.

14.10.2024

Занятие № 7

Однородные уравнения

№ 109 [Ф]: $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}. \qquad (109.1)$

Область определения уравнения описывает неравенство $\dfrac{x+y}{x}>0.$

Поделив правую и левую часть уравнения (109.1) на x, получим

$$y'-\frac{y}{x}=\frac{x+y}{x}\ln\frac{x+y}{x},\quad y'=\frac{y}{x}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right). \qquad (109.2)$$

Следовательно, уравнение (109.1) является однородным. Полагая $y=zx$, для уравнения (109.2) будем иметь

$$z'x+z=z+(1+z)\ln(1+z) \quad \Leftrightarrow \quad xz'=(1+z)\ln(1+z). \qquad (109.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z = 0}$ является решением уравнения. Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\int\frac{dx}{x}+C,\quad C\in R,$$

$$\ln|\ln(1+z)|=\ln|x|+C,\qquad |\ln(1+z)|=C_1|x|,\quad C_1>0,$$

$$\boxed{\ln(1+z)=Cx,\quad C\in R\setminus\{0\}.}$$

Таким образом, общим решением уравнения (109.3) будет

$$\boxed{\ln(1+z)=Cx,\quad C\in R.} \qquad (109.4)$$

(решение z = 0 получается при C = 0)

Выполнив обратную замену в (109.4), получим общее решение уравнения (109.1).

Ответ: $\boxed{\ln\dfrac{x+y}{x}=Cx,\quad C\in R.}$

Замечание. Так как $\lim\limits_{z\to-1-}(z+1)\ln(1+z)=0$, то, если доопределить нулем правую часть уравнения (109.3) при $z=-1$, решением уравнения (109.3) будет и $z=-1$. Тогда и $\boxed{y=-x}$ будет решением уравнения (109.1).

Уравнения, приводящиеся к однородному

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \qquad (*)$$

если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ с помощью подстановки $y = u + \beta, \quad x = v + \alpha,$

где α, β – решение системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1 v + b_1 u}{a_2 v + b_2 u}\right).$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ то $a_2 = ka_1, \ \ b_2 = kb_1,$ и для уравнения (*) будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y - c_1}{k(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right) = g(a_1 x + b_1 y). \qquad (**)$$

Если $b_1 \neq 0,$ то, выполнив в уравнении (**) замену $z = a_1 x + b_1 y$, придем у уравнению

$$\frac{1}{b_1}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = b_1 g(z) + a_1 .$$

№ 114 [Ф]: $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$ (114.1)

С помощью замены $z = 2x + y, \quad y = z - 2x,$ уравнение (114.1) приводится к виду:

$$5(z - 1)dx - (2z - 3)dz = 0. \qquad (114.2)$$

Очевидно, $\boxed{z = 1}$ является решение. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$5dx - \frac{2z-3}{z-1}dz = 0, \quad \int 5dx - \int \frac{2z-3}{z-1}dz = C,$$

$$5x - \int\left(2 - \frac{1}{z-1}\right)dz = C, \quad 5x - 2z + \ln|z-1| = C, \quad C \in R.$$

Полученный общий интеграл можно привести к виду

$$z - 1 = C_1 e^{2z-5x}.$$

В результате получили общее решение уравнения (114.2) **(решение z = 1 получается при C_1 = 0).**

Возвращаясь к переменным x и y, получим

Ответ: $\boxed{2x + y - 1 = Ce^{2y-x}, \quad C \in R.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ **110, 115, 91**.

Подготовка к самостоятельной работе

21.10.2024

Занятие № 8

Однородные уравнения

№ 116 [Ф]: $(x+4y)y' = 2x + 3y - 5.$ (116.1)

Так как

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = -1, \end{cases}$$

то с помощью подстановки

$$y = u - 1, \quad x = v + 4$$

уравнение (116.1) приводится к виду

$$(v + 4u)\frac{du}{dv} = 2v + 3u, \quad (v + 4u)du - (2v + 3u)dv = 0. \qquad (116.2)$$

Полученное уравнение является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv$, то для уравнения (116.2) будем иметь

$$v(1 + 4z)(vdz + zdv) = v(2 + 3z)dv,$$

$$v(1 + 4z)dz = -2(2z^2 - z - 1)dv,$$

$$v(1 + 4z)dz = -2(2z + 1)(z - 1)dv. \qquad (116.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z = 1}$ и $\boxed{z = -1/2}$ являются его решениями ($v = 0$ является решением уравнения (116.3), но не является решением уравнения (116.2), поэтому оно исключается из дальнейшего рассмотрения). Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{4z + 1}{2(2z + 1)(z - 1)}dz = -\frac{dv}{v}, \qquad \int \frac{4z + 1}{2(2z + 1)(z - 1)}dz = -\int \frac{dv}{v} + C, \quad C \in R.$$

Так как

$$\frac{4z + 1}{2(2z + 1)(z - 1)} = \frac{1}{3(2z + 1)} + \frac{5}{6(z - 1)},$$

то для уравнения (116.3) получим общий интеграл

$$\frac{1}{6}\ln|2z + 1| + \frac{5}{6}\ln|z - 1| + \ln|v| = C, \quad C \in R,$$

который можно преобразовать к виду

$$(2z + 1)(z - 1)^5 v^6 = C_1. \qquad (116.4)$$

Таким образом, получили решение уравнения (116.3) в виде (116.4).

(решения $z = 1$ и $z = -1/2$ получаются при $C_1 = 0$)

Возвращаясь к переменным x и y:

$$z = \frac{u}{v} = \frac{y+1}{x-4},$$

Получим

$$\left(2\frac{y+1}{x-4}+1\right)\left(\frac{y+1}{x-4}-1\right)^5 (x-4)^6 = C,$$

$$(2y+x-2)(y-x+5)^5 = C.$$

Ответ: $\boxed{(y-x+5)^5(x+2y-2) = C,\ C \in R.}$

№ 118 [Ф]: $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$ (118.1)

Так как $x+y-1 = x-3+y+2$, то с помощью замены

$$u = y+2, \quad v = x-3,$$

уравнение (118.1) приводится к виду

$$\frac{du}{dv} = 2\left(\frac{u}{u+v}\right)^2 = 2\left(\frac{u/v}{u/v+1}\right)^2. \qquad (118.2)$$

Уравнение (118.2) является однородным. Для его решения воспользуемся заменой $u = zv$. Так как $du = vdz + zdv$, то для уравнения (118.2) будем иметь

$$\frac{vdz+zdv}{dv} = 2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2, \qquad v\frac{dz}{dv} = 2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 - z,$$

$$v\frac{dz}{dv} = -\frac{z(z^2+1)}{(z+1)^2} \qquad (118.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, $\boxed{z = 0}$ является его решением. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz = -\frac{dv}{v}, \quad \int \frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)}dz = -\ln|v| + C, \quad C \in R.$$

Так как

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1},$$

то будем иметь

$$\ln|z| + 2\operatorname{arctg}(z) = -\ln|v| + C, \quad \ln|z| + \ln|v| = -2\operatorname{arctg}(z) + C.$$

Полученный общий интеграл уравнения (118.3) можно привести к виду:

$$zv = C_1 e^{-2\operatorname{arctg}(z)}.$$

Таким образом, получили общее решение уравнения (118.3) **(решение $z = 0$ получается при $C_1 = 0$).**

Выполнив обратную замену $z = \dfrac{u}{v} = \dfrac{y+2}{x-3}$, получим ответ.

Ответ: $\boxed{y + 2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}, \quad C \in R}$. (118.4)

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **113, 117, 119**.

Подготовка к самостоятельной работе