[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.

Занятие № 1 | № 2 | № 3 | № 4 | №5

2.09.2024

Занятие № 1

Составление дифференциальных уравнений семейства кривых

Для того чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \qquad (*)$$

где $C_i,\ (i=\overline{1,n})$ - произвольные постоянные принадлежащие некоторой области **C**, следует:

1) n раз продифференцировать равенство (*), считая y n раз непрерывно дифференцируемой функцией переменной x.
2) из получившихся соотношений и (*) исключить произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

№ 17 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $y = e^{Cx}$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Пусть y(x) = непрерывно дифференцируемое решение уравнения:

$$y = e^{Cx}, \qquad (1)$$

Дифференцируя равенство (1) по переменной x, получим

$$y' = Ce^{Cx} \quad \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad y' = Cy. \qquad (2)$$

Выразим C из (2):

$$C = \frac{y'}{y} \qquad (y \neq 0).$$

Подставив полученное выражение в (1), получим дифференциальное уравнение

$$y = e^{xy'/y} \quad \text{или} \quad y \ln y = xy'.$$

№ 21 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $x^2 + Cy^2 = 2y$, где C – произвольная вещественная постоянная.

Дифференцируя равенство

$$x^2 + Cy^2 = 2y, \qquad (1)$$

по переменной x, получим

$$2x + 2Cyy' = 2y', \quad Cyy' = y' - x.$$

Выразим C из последнего равенства

$$C = \frac{y' - x}{yy'} \qquad (yy' \neq 0)$$

и подставим его в (1). В результате получим дифференциальное уравнение:

$$x^2 + \frac{y' - x}{yy'} y^2 = 2y \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - y)y' - xy = 0.$$

№ 27 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение семейств линий: $\ln y = ax + by$, где a, b – произвольные вещественные постоянные.

Дважды дифференцируя равенство

$$\ln y = ax + by, \qquad (1)$$

по переменной x, получим

$$\frac{y'}{y} = a + by', \tag{2}$$

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = by''. \tag{3}$$

Из (2) и (3) найдем

$$b = \frac{y''y - y'^2}{y^2 y''}, \qquad a = \frac{y'^3}{y^2 y''} \qquad (yy'' \neq 0),$$

которые и подставим в (1). В результате получим дифференциальное уравнений

$$\ln y = \frac{y'^3}{y^2 y''} x + \frac{y''y - y'^2}{y^2 y''} y \quad \Leftrightarrow \quad y^2 y''(\ln y - 1) = y'^2 (y'x - y).$$

№ 30 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

Согласно условию, если C – абсцисса центра окружности, то $2C$ - его ордината. Уравнение окружностей радиуса 1 и с центром в точке (C, $2C$) имеет вид

$$(x - C)^2 + (y - 2C)^2 = 1. \tag{1}$$

Считая $y = y(x)$, продифференцируем равенство (1) по переменной x, получим

$$x - C + (y - 2C)y' = 0. \tag{2}$$

Из (2) выразим C:

$$C = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

и подставим в (1):

$$\left(x-\frac{x+yy'}{1+2y'}\right)^2+\left(y-2\cdot\frac{x+yy'}{1+2y'}\right)^2=1.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$(y-2x)^2(y'^2+1)=(1+2y')^2.$$

№ 31 [Ф]: Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной Oy, и касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

Для параболы, которая имеет ось симметрии, параллельную оси Oy, и касается прямой $y = 0$ (это ось абсцисс Ox), вершина лежит на оси Ox. Общее уравнение семейства таких парабол имеет вид:

$$y=a(x-C)^2, \tag{1}$$

где: C – абсцисса вершины параболы, произвольная величина; *a – коэффициент, который учитывает направление ветвей параболы и их отклонение от оси симметрии* (пока произвольная величина).

Установим связь между параметрами a и C, используя условие касания параболы (1) прямой $y = x$. Пусть точка (x_0, y_0) – соответствующая параметру C точка касания параболы (1) прямой $y = x$ (рис. 1). Имеем

$$\begin{cases} y'(x_0)=\boxed{2a(x_0-C)=1,} \\ y_0=x_0, \\ y_0=a(x_0-C)^2. \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему, найдем $a=-\dfrac{1}{4C}$, $C\neq 0$. Найденное a подставим в (1). В результате получим уравнение семейства парабол, удовлетворяющих условию задания:

$$y=-\frac{(x-C)^2}{4C},\quad C\in R\setminus\{0\}. \tag{3}$$

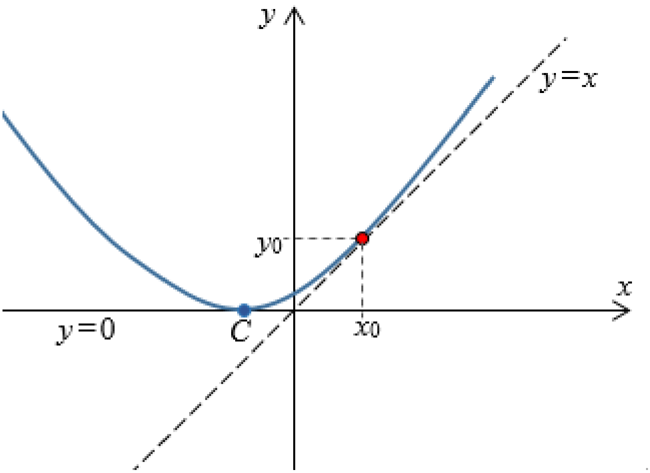


Рис. 1

Для построения соответствующего ему дифференциального уравнения, продифференцируем (3) по переменной x, считая $y = y(x)$. Будем иметь

$$y' = -\frac{x-C}{2C} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{x}{1-2y'}.$$

Теперь из (3) можно исключить C следующим образом:

$$y = -\frac{(x-C)^2}{4C} \;\rightarrow\; 2y = -\frac{x-C}{2C}\cdot(x-C) \;\rightarrow\; 2y = y'\cdot(x-C) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2y = y'\cdot\left(x - \frac{x}{1-2y'}\right) \;\rightarrow\; 2y = xy'\cdot\frac{-2y'}{1-2y'} \;\rightarrow\; x(y')^2 = y(2y'-1).$$

Ответ: $x(y')^2 = y(2y'-1).$

Домашнее задание

[Ф] № **21** (построить на плоскости xOy семейство кривых, задавая различные значения параметра C);
[Ф] №№ **18**, **20**, **26**, **32**.

9.09.2024

Занятие № 2
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными

№ 52 [Ф]: Решить уравнение: $\sqrt{y^2+1}\cdot dx = xydy.$ (1)

Очевидно, x = 0 является решением уравнения (1). Найдем остальные решения, выполнив разделение переменных в уравнении и проинтегрировав его

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad \ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Ответ: $x = 0$, $\ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C.$

Заметим, что общий интеграл $\ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C$ можно преобразовать следующим образом:

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1}+C \iff |x| = A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}, \quad A = e^C > 0,$$

$$x = A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}, \ A \neq 0. \qquad (2)$$

Решение $x = 0$ можно получить из соотношения (2), если положить A = 0. Тогда ответ будет таким:

$$x = A\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}, \ A \in \mathrm{R}.$$

№ 54 [Ф]: Решить уравнение: $y'\operatorname{ctg} x + y = 2.$ (1)

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} = 2 - y.$$

Очевидно, y = 2 является решением уравнения (1). Найдем остальные:

$$\frac{dy}{y-2} = -\frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad \ln|y-2| = \ln|\cos x| + \ln|C|,$$

где C – произвольная постоянная, но $C \neq 0$. Последнее соотношение равносильно следующему

$$|y-2| = |C||\cos x|, \quad y - 2 = C\cos x.$$

Если положить $C = 0$, получим решение y = 2.

Ответ: $y - 2 = C\cos x, \quad C \in \mathrm{R}.$

Замечание. Если уравнение (1) записать в дифференциалах:

$$\operatorname{ctg} x \, dy + (y-2)dx = 0,$$

то в ответ надо было бы включить и решения вида:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z,$$

т.е. когда $\operatorname{ctg} x = 0.$

№ 55 [Ф]: Решить уравнение: $y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$ (1)

Очевидно, y = 0 является решением уравнения (1). Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx, \quad \int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx, \quad y^{1/3} = x + C, \quad y = (x+C)^3, \quad C \in \mathrm{R}.$$

Ответ: $y = 0, \quad y = (x+C)^3, \quad C \in \mathrm{R}.$

№ 60 [Ф]: Решить уравнение: $z' = 10^{x+z}$.

Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dz}{dx} = 10^x \cdot 10^z, \quad 10^{-z}\,dz = 10^x\,dx, \quad \int 10^{-z}\,dz = \int 10^x\,dx,$$

$$-\frac{10^{-z}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{C}{\ln 10}, \quad 10^{-z} = C - 10^x,\ C \in \mathrm{R}.$$

Полученный общий интеграл можно разрешить относительно z:

$$z = -\lg(C - 10^x).$$

Ответ: $z = -\lg(C - 10^x),\ \ C \in \mathrm{R}.$

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c),\ a \neq 0,\ b \neq 0,$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = ax + by + c$. Считая $z = z(x)$, получим $z' = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{z' - a}{b}$.

Тогда

$$y' = f(ax + by + c) \quad \overset{z = ax+by+c}{\Rightarrow} \quad z' = bf(z) + a.$$

№ 62 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \cos(y - x)$. (1)

Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если положить

$$y - x = z. \tag{2}$$

При этом будем иметь

$$\frac{d(z + x)}{dx} = \cos z, \quad \frac{dz}{dx} = \cos z - 1. \tag{3}$$

Правая часть уравнения $\cos z - 1 = 0$, если

$$z = 2\pi k,\ k \in Z. \tag{4}$$

Очевидно, (4) являются решениями уравнения (3). Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx, \quad \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx.$$

Так как $\sin^2 \left(z/2 \right) = \dfrac{1 - \cos z}{2}$, то

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx, \qquad -\int \frac{dz}{2\sin^2 (z/2)} = \int dx, \qquad \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C, \quad C \in \mathrm{R}.$$

Получив решения уравнения (3), вернемся к замене (2). В результате получим все решения уравнения (1).

Ответ: $y = x + 2\pi k,\ k \in Z, \quad \operatorname{ctg} \dfrac{y - x}{2} = x + C, \ \ C \in \mathrm{R}.$

Домашнее задание

[Ф] №№ 51, 53, 56, 57, 58.

Разобрать примеры:
[Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными]

16.09.2024

Занятие № 3
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

№ 65 [Ф]: Решить уравнение: $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$ (1)

<u>1 способ</u>. Выполним замену

$$z = 4x + 2y - 1. \qquad (2)$$

Так как

$$y' = \frac{z' - 4}{2},$$

то уравнение (1) приводится к виду

$$z' = 2\sqrt{z} + 4. \qquad (3)$$

Заметим, что $2\sqrt{z} + 4 > 0$. Разделив переменные в уравнении (3), получим

$$\frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = dx, \qquad \int \frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = \int dx + C,$$

где C – произвольная постоянная. Так как

$$\int \frac{dz}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = \left(\text{замена}: \quad \sqrt{z}+2 = t\right) =$$

$$= \int \frac{t-2}{t}\,dt = t - 2\ln t = \sqrt{z} + 2 - 2\ln(\sqrt{z}+2),$$

то интегрирование уравнения (3) дает

$$\sqrt{z} + 2 - 2\ln(\sqrt{z}+2) = x + C \ \text{ или } \ \sqrt{z} - 2\ln(\sqrt{z}+2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (2), получим общий интеграл уравнения (1):

$$\boxed{\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C, \quad C \in \mathrm{R}.} \qquad (4)$$

<u>2 способ</u>. Уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными и с помощью замены

$$z = \sqrt{4x+2y-1}. \qquad (5)$$

Тогда

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{4x+2y-1}} \cdot (4+2y') = \frac{1}{z}(2+y') \quad \Rightarrow \quad y' = zz' - 2.$$

Таким образом, с помощью замены (5) уравнение (1) приводится к виду $zz' - 2 = z$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{zdz}{z+2} = dx, \qquad \int \frac{zdz}{z+2} = \int dx + C, \quad z - 2\ln(z+2) = x + C.$$

Выполнив обратную замену (4), получим общий интеграл уравнения (1), совпадающий с (4).

Поиск решений, удовлетворяющих заданным условиям

№ 54 [Ф]: Найти решение уравнения $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(x) \to -1$ при $x \to 0$.

Общее решение уравнения имеет вид (см. занятие № 2):

$$y = 2 + C\cos x, \quad C \in \mathrm{R}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(2 + C\cos x) = 2 + C = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -3.$$

Следовательно, решением уравнения, удовлетворяющим заданному условию, является следующее $\boxed{y = 2 - 3\cos x.}$

№ 55 [Ф]: Найти решение уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее условию $y(2) = 0$.

Из множества решений уравнения (см. занятие № 2):

$$y = 0, \quad y = (x + C)^3, \quad C \in \mathrm{R},$$

два удовлетворяют заданному условию:

$$\boxed{y = 0, \quad y = (x - 2)^3.}$$

№ 66 [Ф]: Решить уравнение $x^2 y' - \cos 2y = 1.$ (1)

Найти решение уравнения, удовлетворяющее условию, удовлетворяющее условию $y(+\infty) = 9\pi/4$.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\cos 2y + 1} = \frac{dx}{x^2}, \qquad \frac{dy}{2\cos^2 y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}, \text{ или } \quad y = arctg\left(2C - \frac{2}{x}\right) + k\pi,\ k \in Z.$$

Подчинив найденное решение заданному условию $y(+\infty) = 9\pi / 4$, будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} y(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(C - \dfrac{1}{x}\right), \\ y(+\infty) = \dfrac{9\pi}{4} \end{cases} \to\ C = \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} y(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(2C - \dfrac{2}{x}\right) + k\pi,\quad k \in Z, \\ C = 1/2, \\ y(+\infty) = \dfrac{9\pi}{4}, \\ \operatorname{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \to\ \frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi\ \to\ k = 2.$$

Ответ: $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \dfrac{2}{x}\right) + 2\pi.$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **63, 64, 67, 302, 309, 312**.

23.09.2024

Занятие № 4

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Задача о площади листа виктории-регии

Скорость увеличения площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна радиусу листа R и количеству солнечного света Q, падающего на него. Количество солнечного света пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу.

Немецкий ботаник Рихард Шомбургк вместе со старшим братом Робертом, известным путешественником, обследовавший по заданию Лондонского Географического общества Британскую Гвиану (ныне Республика Гайана), в заводях бассейна Амазонки обнаружил гигантскую кувшинку. В честь взошедшей полгода спустя на британский престол королевы Виктории она была названа викторией-регией, в переводе с латыни — «Виктория царственная». Круглые с бортами листья этой кувшинки достигают в диаметре 2 м и не тонут под грузом 50 кг, ее ароматные и пышные цветки «живут» около полутора суток, успевая за это время трижды поменять свой цвет.

Найдите зависимость между площадью листа S и временем t, если в 6 $ч$ утра эта площадь составляла 1600 $см^2$, а в 18 $ч$ того же дня 2500 $см^2$.

Принять, что угол α между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 *ч* утра и в 18 ч равен 90°, а в полдень – 0°.

Ответ: $S(t)=\dfrac{400^2}{\left(\cos\dfrac{\pi t}{12}+9\right)^2}$.

№ 90 [М]: Решить уравнение: $y'=\dfrac{1}{x+y+1}$. (1)

1 способ. Уравнение (1) не является уравнением с разделяющимися переменными, но может быть сведено к нему, если выполнить замену $z=x+y+1$. Считая $z=z(x)$, получим

$$z'=1+y' \quad\Rightarrow\quad y'=z'-1.$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$z'=\frac{1}{z}+1 \quad\Leftrightarrow\quad z'=\frac{z+1}{z}. \qquad (2)$$

Очевидно, одним из решений уравнения (2) будет $\boxed{z=-1}$. Найдем остальные решения, разделяя переменные:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z+1}{z}, \quad \frac{zdz}{z+1}=dx, \quad \int\frac{zdz}{z+1}=\int dx+C, \quad \int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)=\int dx+C,$$

$$z-\ln|z+1|=x+C, \quad \ln|z+1|=z-x-C, \quad C\in R.$$

Заменив z на $(x+y+1)$, получим все решения заданного уравнения

$$x+y+2=0, \qquad \ln|x+y+2|=y-C, \quad C\in R. \qquad (3)$$

2 способ. Рассмотрим перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy}=x+y+1,$$

Для которого выполнив замену $z=x+y+1$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1. \qquad (4)$$

Очевидно, одним из решений уравнения (4) будет $\boxed{z = -1}$. Найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{dy} = z + 1, \quad \frac{dz}{z+1} = dy, \quad \int \frac{dz}{z+1} = \int dy + C, \quad \ln|z+1| = y + C, \ C \in R.$$

Возвращаясь к замене, получим все решения заданного уравнения:

$$x + y + 2 = 0, \quad \ln|x + y + 2| = y + C, \ C \in R. \qquad (5)$$

Полученное множество решений совпадает с полученным первым способом (3).

Так как

$$\ln|x + y + 2| = y + C, \ C \in R \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 2 = C_1 e^{y}, \quad C_1 \neq 0,$$

то все решения (2) можно записать следующим образом:

$$\boxed{x + y + 2 = C_1 e^{y}, \quad C_1 \in R.}$$

№ 146 [M]: Решить уравнение:

$$(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) – уравнение с разделяющимися переменными:

$$y^2(1 + x)dx + x^2(1 - y)dy = 0.$$

Очевидно $\boxed{x = 0 \text{ и } y = 0}$ являются решениями уравнения. Найдем другие решения, разделяя переменные:

$$\frac{1+x}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0, \quad \int \frac{1+x}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C,$$

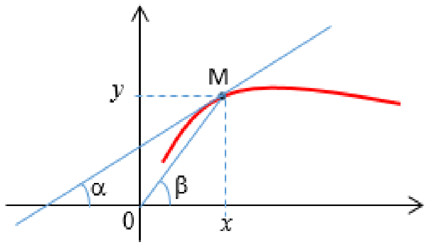
$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|y| - \frac{1}{y} = C, \quad \ln\frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, \ C \in R.$$

В результате получили

Ответ: $x = 0, \quad y = 0, \; \ln\frac{|x|}{|y|} - \frac{x+y}{xy} = C, \; C \in R.$

Задача о семействе кривых

Постройте уравнение семейства кривых, которые обладают следующим свойством: угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке вдвое больше углового коэффициенте радиус-вектора точки касания.



$$k_1 = 2k_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\beta \; \Leftrightarrow \; y' = 2\cdot\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|, \quad y = Cx^2.$$

Ответ: $y = Cx^2, \; C \neq 0.$

Домашнее задание

Дополнение к задаче о площади листа. Построить график функции S(t) на промежутке t $\in$ [0; 12]. Выяснить, в какой момент времени наблюдается максимальный прирост площади.

[**М**]: № 147: $(1+y^2)\left(e^{2x}dx - e^y dy\right) - (1+y)dy = 0.$

[**Ф**]: №№ **319, 325, 352, 369**

30.09.2024

Занятие № 5

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

№ 68, а [Ф]:
Найти ортогональные траектории к линиям семейства $y = Cx^2$

Сначала составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Дифференцируя по x уравнение заданного семейства (см. занятие № 1) и исключая параметр C, получим уравнение $y' = \frac{2y}{x}$. Заменяя в этом уравнении y' на $-1/y'$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $y' = -\frac{x}{2y}$. Найдем его решение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \iff 2ydy = xdx, \ \int 2ydy = \int xdx + C,$$

$$y^2 + x^2/2 = C, \ C \in R.$$

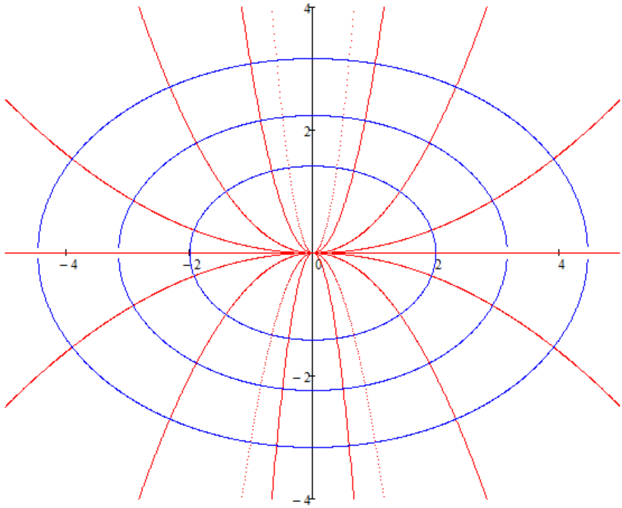
Ответ: $2y^2 + x^2 = C, \ C \in R.$
Иллюстрация: рис. 1.

№ 68, в [Ф]:
Найти ортогональные траектории к линиям семейства $Cx^2 + y^2 = 1$.

1. Составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых:

$$\begin{cases} Cx^2 + y^2 = 1, \\ Cx + yy' = 0, \end{cases} \Rightarrow \ xyy' = y^2 - 1.$$

2. Замена y' на $-1/y'$ дает дифференциальное уравнение ортогональных траекторий:



Кривые заданного семейства (параболы и прямая y = 0)

Ортогональные траектории (эллипсы)

Рис. 1. Иллюстрация к № 68. а

$$xy = (1 - y^2)y'. \qquad (*)$$

3. Находим ортогональные траектории, решая уравнение (*):

$$\frac{1-y^2}{y}dy = xdx, \quad \int \frac{1-y^2}{y}dy = \int xdx + C, \; C \in R,$$

$$\ln|y| - y^2/2 = x^2/2 + C \quad \Leftrightarrow \quad y = C_1 e^{\frac{x^2+y^2}{2}}, \; C_1 \in R \setminus \{0\}.$$

Учитывая, что $y = 0$ также является решением уравнения (*), получаем

Ответ: $y^2 = Ce^{x^2+y^2}$, $C \geq 0$. (рис. 2)

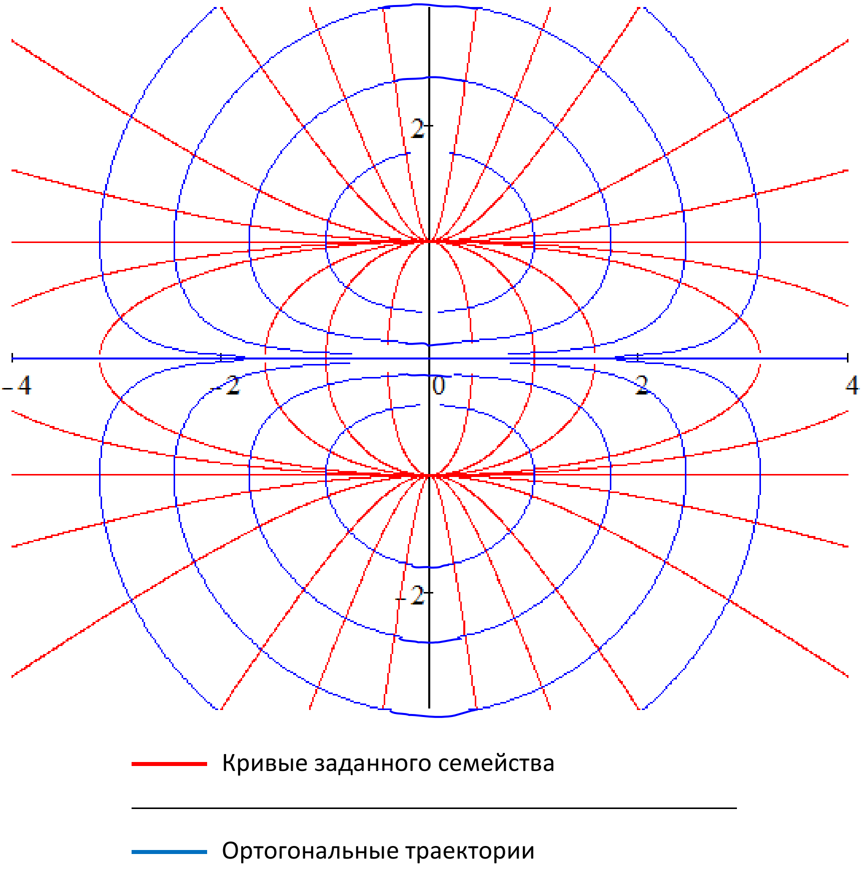


Рис. 2. Иллюстрация к № 68. в

№ 80 [Ф]: Тело охладилось за 10 *мин* от 100°C до 60°C. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°C. Когда тело остынет до 25°C?

Замечание. Принять, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Пусть t – независимая переменная, время (*мин*); T(t) – температура тела (в °C) через t *мин* с того момента, когда температура тела было 100°C. Тогда условие задачи можно записать в виде следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T(t) - 20), \\ T(0) = 100, \quad T(10) = 60, \end{cases} \qquad (*)$$

где k – пока неизвестный коэффициент пропорциональности. Дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет решение:

$$T(t) = Ce^{kt} + 20.$$

Подчинив его заданным граничным условиям, составим систему для нахождения постоянной C и коэффициента пропорциональности k:

$$\begin{cases} C + 20 = 100, \\ Ce^{10k} + 20 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 80, \\ e^{10k} = 1/2. \end{cases}$$

Тогда решением задачи (*) будет функция:

$$T(t) = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} + 20.$$

Найдем t, когда температура тела станет равной 25°C:

$$T(t) = 80 \cdot 2^{-t/10} + 20 = 25 \quad \Rightarrow \quad t = 40.$$

Ответ: 40 *мин*.

№ 82 [Ф]: Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Обозначим:

$x(t)$ – температура куска металла через t минут после помещения в печь;

$y(t)$ – температура печи через t минут после начала повышения температуры.

Для $y(t)$ имеем:

$$y(t) = \alpha t + \beta, \;\; y(0) = a, \; y(60) = b \quad \Rightarrow \quad y(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot t.$$

Тогда для $x(t)$ будем иметь:

$$\begin{cases} x'(t) = k(y(t) - x(t)), \\ y(t) = a + \dfrac{b-a}{60} \cdot t, \\ x(0) = a. \end{cases} \qquad (1)$$

Задача (1) имеет решение $x(t) = a + \dfrac{b-a}{60} \cdot \left(t - \dfrac{1-e^{-kt}}{k} \right)$.

Тогда $x(60) = b - \dfrac{b-a}{60k}(1 - e^{-60k})$.

Домашнее задание

[**Ф**]: №№ **68 (б), 71.**