



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. [djvu](#)

Занятие

[№ 8](#)

[№ 9](#)

[№ 10](#)

[№ 11](#)

05.04.2024

Занятие № 7

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Однородные уравнения

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n – вещественные постоянные и $a_0 \neq 0$.

Введя дифференциальный оператор L вида

$$L \equiv a_0 \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n, \quad (2)$$

уравнение (1) можно записать как $Ly = 0$.

Если y_1, y_2, \dots, y_n – линейно независимые решения уравнения (1), то общее решение уравнения (1) определяет их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (3)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – произвольные постоянные. Функции y_1, y_2, \dots, y_n образуют **фундаментальную систему решений (ФСР)** уравнения (1).

Для построения вещественной ФСР уравнения (1) требуется найти все корни соответствующего **характеристического уравнения**

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3)$$

и воспользоваться следующими правилами:

Правило 1.

В случае **простых** корней λ_j существует вещественная фундаментальная система решений, состоящая из функций $e^{\lambda_j x}$ для каждого вещественного корня λ_j и функций $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ для каждой пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$.

Правило 2.

В случае **кратных** корней λ_j существует вещественная фундаментальная система решений, состоящая из функций

$$e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \dots, x^{k_j-1} e^{\lambda_j x}$$

для каждого вещественного корня λ_j кратности k_j и функций

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

для каждой пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, кратности k .

№ 511 [Ф]: $y'' + y' - 2y = 0$.

(511.1)

Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1 (случай комплексных корней), состоит из функций e^x и e^{-2x} . Общее решение уравнения (511.1) строится по формуле (3).

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

№ 515 [Ф]: $y'' - 4y' + 5y = 0$. (515.1)

Найдем корни соответствующего характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1, состоит из функций $e^{2x} \cos x$ и $e^{2x} \sin x$. Общее решение уравнения (515.1) строится по формуле (3).

Ответ: $y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

№ 519 [Ф]: $y^{IV} - y = 0$. (519)

Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1, состоит из функций e^x , e^{-x} , $\cos x$, $\sin x$. Тогда общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

№ 521 [Ф]: $y^{VI} + 64y = 0$. (521)

Составив соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^6 + 64 = 0 \Leftrightarrow \lambda^6 = -2^6, \lambda = 2(-1)^{1/6}.$$

Найдем все его корни, используя формулу для корней n -степени из ненулевого комплексного числа $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Для $z = -1$ имеем $|z| = 1$, $\varphi = \pi$, тогда

$$\lambda_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right), \quad k = \overline{0, 5}.$$

После подстановки соответствующих значений k в формулу для λ_k найдем:

$$\lambda_0 = \sqrt{3} + i, \quad \lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -\sqrt{3} + i, \quad \lambda_3 = -\sqrt{3} - i, \quad \lambda_4 = -2i, \quad \lambda_5 = \sqrt{3} - i.$$

Им соответствует фундаментальная система вещественных функций

$$e^{\sqrt{3}x} \cos x, \quad e^{\sqrt{3}x} \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad e^{-\sqrt{3}x} \cos x, \quad e^{-\sqrt{3}x} \sin x.$$

Следовательно, общее решение уравнения (521) в вещественной форме запишется в виде

$$y = e^{x\sqrt{3}}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + e^{-x\sqrt{3}}(C_5 \cos x + C_6 \sin x).$$

№ 523 [Ф]: $4y'' + 4y' + y = 0$.

(523)

Найдем корни соответствующего характеристического уравнения

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 2 (корень $\lambda = -1/2$ имеет кратность, равную 2), состоит из функций $e^{-x/2}$ и $xe^{-x/2}$. Общее решение уравнения (523) строится по формуле (3) и имеет вид

$$y = e^{-x/2}(C_1 + C_2x).$$

$$\text{№ 524 } [\Phi]: y^v - 6y^{iv} + 9y''' = 0. \quad (524)$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_{4,5} = 3.$$

Учитывая кратность корней $\lambda = 0$ (кратность 3) и $\lambda = 3$ (кратность 2) в соответствии с правилом 2 общее решение уравнения (524) запишем в виде

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x).$$

$$\text{№ 526 } [\Phi]: y^{iv} + 2y'' + y = 0. \quad (526)$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = i, \quad \lambda_{3,4} = -i.$$

Учитывая кратность корней $\lambda = \pm i$ (кратность 2), в соответствии с правилом 2 общее решение уравнения (526) запишем в виде

$$y = (C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x.$$

$$\text{№ 530 } [\Phi]: y^v + 8y''' + 16y' = 0. \quad (530)$$

Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2i, \quad \lambda_{4,5} = -2i.$$

Фундаментальная система решений состоит из функций

$$1, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x \cos 2x, \quad x \sin 2x.$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 + (C_2 + C_3x) \cos 2x + (C_4 + C_5x) \sin 2x.$$

$$\text{№ 532 [Ф]: } y^{IV} + 4y'' + 3y = 0.$$

(532)

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 3) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{3}.$$

Фундаментальная система решений, согласно правилу 1 (случай комплексных корней), состоит из функций

$$\cos x, \sin x, \cos \sqrt{3}x, \sin \sqrt{3}x.$$

Общее решение уравнения (532) строится по формуле (2).

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x.$

$$\text{№ 582[Ф]: } y'' - 2y' + y = 0; \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2.$$

(582.1)

Прежде всего найдем общее решение уравнения. Составив соответствующее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Учитывая кратность корня $\lambda = 1$ (кратность 2), в соответствии с правилом 2 общее решение уравнения (582) запишем в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x. \quad (582.2)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 , соответствующих искомому частному решению подчиним построенное решение (582.2) заданным условиям:

$$\begin{cases} y(2) = e^2(C_1 + 2C_2) = 1, \\ y'(2) = e^2(C_1 + 3C_2) = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 7e^{-2}, \\ C_2 = -3e^{-2}. \end{cases}$$

Подставив найденные C_1 и C_2 в (582.2), получим искомое частное

решение: $y = e^{x-2}(7 - 3x).$



Домашнее задание

[Ф] №№ 512, 516, 520, 522, 525, 527, 529.

12.04.2024



Занятие № 8

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения

Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (4)$$

где коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n – вещественные постоянные и $a_0 \neq 0$, а $f(x)$ – функция, непрерывная на интервале (α, β) . При этом решения уравнения (4) определены не на всей вещественной оси, как уравнения (1), а только на интервале (α, β) .

Уравнение (4) можно записать в виде $Ly = f(x)$, где L – дифференциальный оператор, определяемый формулой (2).

Для решения уравнения (4) следует вначале найти функции y_1, y_2, \dots, y_n , образующие фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения (а это уравнение (1)), а далее можно,

1) либо применить *метод вариации произвольных постоянных*,

2) либо, если функция $f(x)$ имеет некоторый определенный вид, применить теорему¹ о структуре решения линейного неоднородного уравнения:

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного уравнения (4) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{одн}$ и некоторого частного решения $y_{част}$ уравнения (4).*

и искать частное решение уравнения (4) *методом неопределенных коэффициентов.*

Приведем несколько правил определения вида частного решения $y_{част}$ по виду правой части уравнения (4):

Правило 1	
Вид функции $f(x)$	$P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ – полином степени m , коэффициент a не является корнем характеристического уравнения (3)
Вид частного решения	$Q_m(x)e^{ax}$, где $Q_m(x)$ – полином степени m , коэффициенты которого надо найти.
Правило 2	
Вид функции $f(x)$	$P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ – полином степени m , коэффициент a является корнем характеристического уравнения (3) и имеет кратность k
Вид частного решения	$x^k Q_m(x)e^{ax}$, где $Q_m(x)$ – полином степени m , коэффициенты которого надо найти.

¹ См., например, в учебнике: Жабко А.П. и др. Дифференциальные уравнения и устойчивость. – СПб.: Издательство «Лань», 2015.

Правило 3	
Вид функции $f(x)$	$P_m^1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + P_l^2(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, где $P_m^1(x)$, $P_l^2(x)$ – полиномы степени m и l соответственно с вещественными коэффициентами, комплексное число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (3).
Вид частного решения	$Q_s^1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_s^2(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, где $Q_s^1(x)$, $Q_s^2(x)$ – полиномы степени $s = \max(m, l)$, коэффициенты которых надо найти.
Правило 4	
Вид функции $f(x)$	$e^{\alpha x} (P_m^1(x) \cos \beta x + P_l^2(x) \sin \beta x)$, где $P_m^1(x)$, $P_l^2(x)$ – полиномы степени m и l соответственно с вещественными коэффициентами, комплексное число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения (3) и имеет кратность k .
Вид частного решения	$x^k e^{\alpha x} (Q_s^1(x) \cos \beta x + Q_s^2(x) \sin \beta x)$, где $Q_s^1(x)$, $Q_s^2(x)$ – полиномы степени $s = \max(m, l)$, коэффициенты которых надо найти.
<p>Коэффициенты многочленов $Q_m(x)$, $Q_s^1(x)$, $Q_s^2(x)$ находятся после подстановки $y_{\text{част}}$ в исходное уравнение.</p>	

Принцип суперпозиции

При поиске частного решения уравнения (4) в случае, когда правая часть представима в виде суммы

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_r(x),$$

иногда легче найти частные решения y_j для уравнений

$$Ly = f_j(x), \quad j = \overline{1, r}.$$

Тогда частное решение уравнения (4) будет определяться их суммой, т. е. $y_{\text{част}} = y_1 + y_2 + \dots + y_r$.

$$\text{№ 533 [Ф]: } y'' - 2y' - 3y = e^{4x}. \quad (533)$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3,$$

получим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Вид частного решения определим по виду правой части уравнения (533). Учитывая, что $a = 4$ не является корнем характеристического уравнения, по [правилу 1](#) имеем $y_q = A e^{4x}$. Подставляя это выражение в уравнение (533) вместо y , получим

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}, \quad 5Ae^{4x} = e^{4x}, \quad 5A = 1, \quad A = \frac{1}{5}.$$

В результате получили частное решение уравнения (533) $y_q = \frac{1}{5} e^{4x}$

и следовательно, и общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}.$$

$$\text{№ 534 [Ф]: } y'' + y = 4xe^x. \quad (534)$$

1) $\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad y_{\text{одн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

2) $a = 1, \quad a \neq \lambda_{1,2}, \quad y_q = (Ax + B)e^x.$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_q = (Ax + B)e^x$
0	$(y_q)' = (Ax + B + A)e^x$
1	$(y_q)'' = (Ax + B + 2A)e^x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

$$\frac{e^x}{xe^x} \left| \begin{array}{l} B+B+2A=0 \\ A+A=4 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ A=2, \end{cases}$$

найдем: $A = 2$, $B = -2$. Следовательно, $y_q = (2x - 2)e^x$.

3) Общее решение уравнения (534):

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x.$$

№ 535 [Φ]: $y'' - y = 2e^x - x^2$. (535)

1) $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

2) Используя принцип суперпозиции, установим вид частного решения:

а) $f_1(x) = 2e^x$, $a = 1 = \lambda_1$, $y_1 = Axe^x$:

$$(Axe^x)'' - Axe^x = 2e^x, \quad A(x+2)e^x - Axe^x = 2e^x, \quad A=1 \rightarrow$$

$$\rightarrow y_1 = xe^x.$$

б) $f_2(x) = -x^2$, $a = 0 \neq \lambda_{1,2}$, $y_2 = Ax^2 + Bx + C$:

$$(Ax^2 + Bx + C)'' - (Ax^2 + Bx + C) = -x^2,$$

$$2A - Ax^2 - Bx - C = -x^2,$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получим

$$\begin{cases} -A = -1, \\ -B = 0, \\ 2A - C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 2, \end{cases} \rightarrow y_2 = x^2 + 2.$$

Следовательно, $y_u = y_1 + y_2 = xe^x + x^2 + 2$.

3) Общее решение уравнения (535):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

№ 538 [Ф]: $y'' + y = 4 \sin x$.

(538)

1) $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + i\beta = \lambda_1$. По [правилу 4](#) имеем

$$y_u = x(A \cos x + B \sin x)$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_u = x(A \cos x + B \sin x)$
0	$(y_u)' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$
1	$(y_u)'' = -2A \sin x + 2B \cos x - x(A \cos x + B \sin x)$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

$\cos x$	$2B = 0$	\Rightarrow	}	$A = -2,$
$\sin x$	$-2A = 4$			$B = 0$
$x \cos x$	$A - A = 0$			
$x \sin x$	$B - B = 0$			

Следовательно, $y_q = -2x \cos x$.

3) Общее решение уравнения (538):

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x.$$

№ 540 [Ф]: $y'' - 3y' + 2y = x \cos x.$ (540)

1) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$

2) $\alpha = 0, \beta = 1, \alpha + i\beta \neq \lambda_{1,2}.$ По [правилу 3](#) имеем

$$y_q = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

2	$y_q = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$
-3	$(y_q)' = -(Ax + B - C) \sin x + (Cx + D + A) \cos x$
1	$(y_q)'' = -(Ax + B - 2C) \cos x - (Cx + D + 2A) \sin x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения:

$\cos x$	$2B - 3D - 3A - B + 2C = 0$	\Rightarrow	$\begin{cases} 3A - B - 2C + 3D = 0, \\ 2A - 3B + 3C - D = 0, \\ A - 3C = 1, \\ 3A + C = 0. \end{cases}$
$\sin x$	$2D + 3B - 3C - D - 2A = 0$		
$x \cos x$	$2A - 3C - A = 1$		
$x \sin x$	$2C + 3A - C = 0$		

Решив полученную систему, найдем

$$A = \frac{1}{10}, B = -\frac{3}{25}, C = -\frac{3}{10}, D = -\frac{17}{50}.$$

Следовательно, $y_q = (0,1x - 0,12) \cos x - (0,3x + 0,34) \sin x.$

3) Общее решение уравнения (538):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0,1x - 0,12) \cos x - (0,3x + 0,34) \sin x.$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 520, 522, 525, 527, 529, 536.

19.04.2024



Занятие № 9

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения

№ 546 [Ф]: $y'' + y = x \sin x.$ (546)

1) $\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

2) $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \alpha + i\beta = \lambda_1.$ По [правилу 4](#) имеем

$$y_u = x((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

1	$y_u = (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x$
0	$(y_u)' = (Cx^2 + (2A + D)x + B) \cos x + (-Ax^2 + (2C - B)x + D) \sin x$
1	$(y_u)'' = (-Ax^2 + (4C - B)x + 2(A + D)) \cos x - (Cx^2 + (4A + D)x - 2(C - B)) \sin x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения, получим

$\cos x$	$2(A + D)$
$\sin x$	$2(C - B)$
$x \cos x$	$4C - B + B = 4C$
$x \sin x$	$-4A - D + D = -4A$
$x^2 \cos x$	$A - A = 0$
$x^2 \sin x$	$C - C = 0$

и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения, будем иметь:

$$A + D = 0, \quad C - B = 0, \quad C = 0, \quad -4A = 1.$$

Отсюда найдем: $A = -\frac{1}{4}, \quad B = C = 0, \quad D = -A = \frac{1}{4}.$

Следовательно, $y_ч = \frac{1}{4}(\sin x - x \cos x) \cdot x.$

3) Общее решение уравнения (546):

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}(x \cdot \sin x - x^2 \cos x).$$

№ 548 [Ф]: $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x.$ (548)

1) $\lambda^2 - 5\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5, \quad y_{одн} = C_1 + C_2 e^{5x}.$

2) Используя принцип суперпозиции, установим вид частного решения:

а) $f_1(x) = 3x^2, \quad a = 0 = \lambda_1.$ Согласно [правилу 2](#), соответствующую функцию y_1 ищем в виде $y_2 = x(Ax^2 + Bx + C):$

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx)'' - 5(Ax^3 + Bx^2 + Cx)' = 3x^2,$$

$$6Ax + 2B - 15Ax^2 - 10Bx - 5C = 3x^2, \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -15A = 3, \\ 6A - 10B = 0, \\ 2B - 5C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5}, \\ B = -\frac{3}{25}, \\ C = -\frac{6}{125} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow y_1 = -\frac{1}{125}(25x^3 + 15x^2 + 6x).$$

б) $f_2(x) = \sin 5x$, $a = 5i \neq \lambda_{1,2}$, $y_2 = A \cos 5x + B \sin 5x$:

$$(A \cos 5x + B \sin 5x)'' - 5(A \cos 5x + B \sin 5x)' = \sin 5x,$$

$$-25(A + B) \cos 5x + 25(A - B) \sin 5x = \sin 5x,$$

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 25(A - B) = 1 \end{cases} \rightarrow A = -B = \frac{1}{50} \rightarrow y_2 = \frac{1}{50}(\cos 5x - \sin 5x).$$

Следовательно,

$$y_4 = y_1 + y_2 = -\frac{1}{125}(25x^3 + 15x^2 + 6x) + \frac{1}{50}(\cos 5x - \sin 5x).$$

3) Общее решение уравнения (548):

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{1}{125}(25x^3 + 15x^2 + 6x) + \frac{1}{50}(\cos 5x - \sin 5x).$$

№ 549 [Ф]: $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x.$ (549)

Характеристическое уравнение: $H(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$

$$f_1(x) = e^x$$

$$a = 1, P_0(x) = 1,$$

a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $H(1) = 1 \neq 0$

Правило 1 $\rightarrow y_1 = Ae^x$

$f_2(x) = x \cos x$	$a = \alpha + i\beta = i, P_1^1(x) = x, P_0^2(x) = 0,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $H(i) = 1 - 2i \neq 0$
---------------------	--

Правило 3 $\rightarrow y_2 = (Bx + C) \cos x + (Dx + E) \sin x$

Таким образом, частное решение уравнения (549) имеет вид:

$$y_{\text{част}} = y_1 + y_2 = Ae^x + (Bx + C) \cos x + (Dx + E) \sin x.$$

№ 550 [Ф]: $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x} \cos x.$ (550)

Характеристическое уравнение $H(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$

$f_1(x) = 3xe^{-3x}$	$a = -3, P_1(x) = 3x,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_{1,2}$
----------------------	---

Правило 1 $\rightarrow y_1 = (Ax + B)e^{-3x}$

$f_2(x) = -2e^{3x} \cos x$	$a = \alpha + i\beta = 3 + i, P_0^1(x) = -2, P_0^2(x) = 0,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_{1,2}$
----------------------------	--

Правило 3 $\rightarrow y_2 = e^{3x} (C \cos x + D \sin x)$

Таким образом, частное решение уравнения (550) имеет вид:

$$y_{\text{част}} = y_1 + y_2 = (Ax + B)e^{-3x} + e^{3x} (C \cos x + D \sin x).$$

Замечание. В случае, когда $f_2(x) = -2e^{-3x} \cos x$, соответствующая часть частного решения (функция y_2) будет иметь вид:

$$y_2 = e^{-3x} (C \cos x + D \sin x) \cdot x,$$

так как $a = \alpha + i\beta = -3 + i$ является простым корнем характеристического уравнения.

№ 551 [Ф]: $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x.$ (551)

Характеристическое уравнение $H(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i.$

$f(x) = 5xe^{4x} \sin 2x$	$a = \alpha + i\beta = 4 + 2i, P_0^1(x) = 0, P_1^2(x) = 5x,$ a является корнем характеристического уравнения, т.к. $a = \lambda_1$
---------------------------	---

Таким образом, в соответствии с [правилом 4](#) частное решение уравнения (551) имеет вид:

$$y_{\text{част}} = xe^{4x} ((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x).$$

№ 555 [Ф]: $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x \sin x).$ (555)

Характеристическое уравнение $H(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$

$f_1(x) = x^2 e^{4x}$	$a = 4, P_2(x) = x^2,$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_{1,2}$
-----------------------	---

Правило 1 $\rightarrow y_1 = (Ax^2 + Bx + C)e^{4x}$

$f_2(x) = -3xe^{4x} \sin x$	$a = \alpha + i\beta = 4 + i, P_0^1(x) = 0, P_1^2(x) = 3x,$
-----------------------------	---

a является корнем характеристического уравнения, т.к. $a = \lambda_1$

Правило 4 $\rightarrow y_2 = xe^{4x}((Dx + E)\cos x + (Fx + G)\sin x)$

Таким образом, частное решение уравнения (555) имеет вид:

$$y_{\text{част}} = y_1 + y_2 = \\ = (Ax^2 + Bx + C)e^{4x} + xe^{4x}((Dx + E)\cos x + (Fx + G)\sin x).$$

№ 569 [Ф]: $y^{IV} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x.$ (569)

Найдем корни характеристического уравнения:

$$H(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = \pm 2i.$$

Для правой части уравнения имеем:

$$\sin x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x.$$

$f_1(x) = \frac{1}{2} \sin 3x$	$a = \alpha + i\beta = 3i, P_0^1(x) = 0, P_0^2(x) = \frac{1}{2},$ a не является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_{1,2}$
--------------------------------	--

Правило 3 $\rightarrow y_1 = A \cos 3x + B \sin 3x$

$f_2(x) = -\frac{1}{2} \sin x$	$a = \alpha + i\beta = i, P_0^1(x) = 0, P_0^2(x) = \frac{1}{2},$ a является корнем характеристического уравнения, т.к. $a \neq \lambda_1$
--------------------------------	--

Правило 3 $\rightarrow y_2 = x(C \cos x + D \sin x)$

Таким образом, частное решение уравнения (569) имеет вид:

$$y_{\text{част}} = y_1 + y_2 = A \cos 3x + B \sin 3x + x(C \cos x + D \sin x).$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 537, 539, 541, 543, 584, 553, 559, 562, 574.

26.04.2024



Занятие № 10

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения

№ 588 [Ф]: $y^{IV} + y'' = 2 \cos x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1,$
 $y''(0) = y'''(0) = 0.$ (588)

1. Так как $\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_{3,4} = \pm i,$
то общее решение однородного уравнения $y^{IV} + y'' = 0$ имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

2. Определим вид частного решения по виду правой части:

$$y_{\text{ч}} = x(A \cos x + B \sin x)$$

Коэффициенты найдем методом неопределенных коэффициентов:

0	$y_{\text{ч}} = x(A \cos x + B \sin x)$
0	$(y_{\text{ч}})' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$

1	$(y_4)'' = -2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x)$
0	$(y_4)''' = -3A \cos x - 3B \sin x + x(A \sin x - B \cos x)$
1	$(y_4)^{IV} = 4A \sin x - 4B \cos x + x(A \cos x + B \sin x)$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения, получим

$\cos x$	$-2B$
$\sin x$	$2A$
$x \cos x$	$-A + A = 0$
$x \sin x$	$-B + B = 0$

и приравняв их к коэффициентам при тех же функциях в правой части уравнения, будем иметь:

$$-2B = 2 \rightarrow B = -1, \quad 2A = 0 \rightarrow A = 0.$$

Следовательно, частное решение $y_4 = -x \sin x$.

3. Общее решение заданного уравнения (588) имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x \sin x.$$

4. Используя заданные начальные условия, найдем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 = -2, \\ y'(0) = C_2 + C_4 = 1, \\ y''(0) = -C_3 - 2 = 0, \\ y'''(0) = C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -2, \quad C_4 = 0.$$

В результате получили частное решение заданного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y = x - 2 \cos x - x \sin x.$$

где C_i ($i = \overline{1, n}$) – произвольные постоянные. Подставляя выражения (5) в (3), получим общее решение неоднородного уравнения (2) в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + \sum_{i=1}^n \left(\int \psi_i(x) dx \right) y_i. \quad (6)$$

Метод вариации будем применять в случаях, когда по виду правой части уравнения (2) затруднительно предложить вид частного решения и найти его методом неопределенных коэффициентов.

№ 575 [Ф]: $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}. \quad (575)$

Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности $k = 2$, то общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Общее решение заданного уравнения будем искать в виде

$$y = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x, \quad (575.1)$$

где $c_1(x), c_2(x)$ – неизвестные пока непрерывно дифференцируемые функции. Согласно методу вариации произвольных постоянных, для их нахождения составим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x) x e^x = 0, \\ c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^x (x+1) = \frac{e^x}{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) x = 0, \\ c_1'(x) + c_2'(x) (x+1) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Отсюда найдем $c_1'(x) = -1, c_2'(x) = \frac{1}{x}$. Интегрирование полученных уравнений дает $c_1(x) = -x + C_1, c_2(x) = \ln|x| + C_2$. Найденные вы-

ражения для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ подставляем в (575.1). В результате получим общее решение заданного уравнения

$$y = e^x (C_1 - x + x \ln |x| + C_2 x)$$

Приводя подобные слагаемые, ответ можно записать так:

$$y = e^x (C_1 + x \ln |x| + C_2 x)$$

№ 577 [Ф]: $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. (577)

1. Так как $\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$, то общее решение однородного уравнения, соответствующего заданному, имеет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. Общее решение заданного уравнения (577) ищем в виде:

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

3. Составим систему для нахождения функций $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -1, \\ c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}. \end{cases}$$

Интегрирование уравнений дает:

$$c_1(x) = -x + C_1, \quad c_2(x) = \ln |\sin x| + C_2.$$

4. Общее решение заданного уравнения:

$$y = (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln |\sin x|) \sin x.$$

№ 607 [Ф]: $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$. (607)

1. Так как $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$, то общее решение однородного уравнения $y'' + 2y' + y = 0$ имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

2. Общее решение заданного уравнения (607) ищем в виде:

$$y = e^{-x} c_1(x) + c_2(x) x e^{-x}.$$

3. Составим систему для нахождения функций $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) x e^{-x} = 0, \\ -c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) e^{-x} (1-x) = x e^x + \frac{1}{x e^x}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) x = 0, \\ -c_1'(x) + c_2'(x) (1-x) = x e^{2x} + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $c_1'(x) = -x^2 e^{2x} - 1$, $c_2'(x) = x e^{2x} + \frac{1}{x}$.

Интегрирование уравнений дает:

$$c_1(x) = -\frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) - x + C_1,$$

$$c_2(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + \ln |x| + C_2.$$

4. Общее решение заданного уравнения:

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) - x + C_1 \right) e^{-x} + \\ &+ \left(\frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + \ln |x| + C_2 \right) x e^{-x} = \\ &= (C_1 + x \ln |x| + (C_2 - 1)x) e^{-x} + \frac{x-1}{4} e^x. \end{aligned}$$

Ответ можно записать следующим образом

$$y = (C_1 + x \ln |x| + C_2 x) e^{-x} + \frac{x-1}{4} e^x.$$

Замечание. Общее решение заданного уравнения можно найти и таким способом:

1. **Методом вариации произвольных постоянных найти $Y(x)$ – общее решение неоднородного уравнения:** $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$.

При этом общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $Y = e^{-x} c_1(x) + c_2(x) x e^{-x}$. Находим функции $c_1(x)$, $c_2(x)$, решая систему:

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) x e^{-x} = 0, \\ -c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) e^{-x} (1-x) = \frac{1}{x e^x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) x = 0, \\ -c_1'(x) + c_2'(x) (1-x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Отсюда получим: $c_1'(x) = -1$, $c_2'(x) = \frac{1}{x}$. И после интегрирования

найдем $c_1(x) = -x + C_1$, $c_2(x) = \ln |x| + C_2$. Следовательно,

$$Y(x) = (C_1 - x + x \ln |x| + C_2 x) e^{-x}$$

$$\text{или } Y(x) = (C_1 + x \ln |x| + C_2 x) e^{-x}$$

2. **Методом неопределенных коэффициентов найти y_u – частное решение уравнения $y'' + 2y' + y = x e^x$.**

Частное решение ищем в виде $y_u = (Ax + B) e^x$. Имеем

1	$y_u = (Ax + B) e^x$
2	$(y_u)' = (Ax + A + B) e^x$
1	$(y_u)'' = (Ax + 2A + B) e^x$

Собрав коэффициенты при одинаковых функциях в левой части уравнения, получим $4Axe^x + 4(A+B)e^x = xe^x$. Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях уравнения, найдем $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Следовательно, частное решение $y_q = \frac{1}{4}(x-1)e^x$.

3. **Общее решение уравнения (607) – это сумма** $y(x) = Y(x) + y_q$:

$$y(x) = (C_1 + x \ln |x| + C_2 x) e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x.$$

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Уравнение Эйлера

Линейное дифференциальное уравнение сохраняет свой вид при любой замене независимой переменной, причем однородное уравнение остается однородным. Этим свойством можно воспользоваться для того, чтобы попытаться привести данное линейное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами. Так, уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

которое называют **уравнением Эйлера**, при $x > 0$ с помощью замены $x = e^t$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} u' + b_n u = g(t), \quad (2)$$

где $u(t) = y(e^t)$, $g(t) = f(e^t)$. Полученное таким образом уравнение (2) решается способом, рассмотренным на предыдущих занятиях. Построив общее решение уравнения (2), необходимо выполнить

обратную замену $t = \ln x$. В результате будет построено общее решение уравнения (1).

Замечание 1. При $x < 0$ замена $x = -e^t$ приводит к общему решению того же вида (с заменой x на $-x$). Поэтому достаточно найти общее решение уравнения при $x > 0$ и заменить в нем x на $|x|$.

$$\text{№ 589 [Ф]: } x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0. \quad (589)$$

1) При $x > 0$, если выполнить замену $x = e^t$ и обозначить $u(t) = y(e^t)$, будем иметь:

$$y(x) = u(\ln x),$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = u' \cdot \frac{d(\ln x)}{dx} = u' \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(u' \cdot \frac{1}{x} \right) = u'' \cdot \frac{1}{x^2} - u' \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (589), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$u'' - 5u' + 6u = 0. \quad (589.1)$$

Т.к. соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, то общим решением уравнения (589.1) будет

$$u = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}. \quad (589.2)$$

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3. \quad (589.3)$$

2) При $x < 0$, выполнив замену $x = -e^t$ и обозначив $u(t) = y(-e^t)$, будем иметь:

$$y(x) = u(\ln(-x)),$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = u' \cdot \frac{d(\ln(-x))}{dx} = u' \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(u' \cdot \frac{1}{x} \right) = u'' \cdot \frac{1}{x^2} - u' \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (589), получим уравнение с постоянными коэффициентами (589.1). Его общее решение имеет вид (589.2). А, возвращаясь к старым переменным, получим $y = C_1(-x)^2 + C_2(-x)^3 = C_1x^2 - C_2x^3$.

Еще раз заметим, что при $x < 0$ замена $x = -e^t$ приводит к общему решению того же вида (с заменой x на $-x$). Поэтому достаточно было найти общее решение уравнения при $x > 0$ и заменить в нем x на $|x|$.

- 3) В силу произвольности коэффициентов C_1 и C_2 общее решение заданного уравнения можно записать так:

$$y = C_1x^2 + C_2x^3.$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 578, 579, 585, 587.

03.05.2024



Занятие № 11

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Уравнение Эйлера

Замечание 2. Построить решение однородного уравнения Эйлера можно гораздо проще, если исходить из того, что решение уравне-

ния Эйлера, когда $x > 0$, ищется в виде $y = e^{\lambda t} = (e^t)^{\lambda} = x^{\lambda}$. Подставив x^{λ} в уравнение (1) (когда $f(x) = 0$) и разделив правую и левую части уравнения на x^{λ} , получим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda - 1) \cdot \dots \cdot (\lambda - n + 1) + a_1 \lambda(\lambda - 1) \cdot \dots \cdot (\lambda - n + 2) + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Простому корню λ_1 характеристического уравнения соответствует решение x^{λ_1} , а k -кратному корню λ_1 соответствует k линейно независимых решений вида x^{λ_1} , $x^{\lambda_1} \ln x$, $x^{\lambda_1} \ln^2 x$, ..., $x^{\lambda_1} \ln^{k-1} x$. Если коэффициенты уравнения Эйлера вещественные, а характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta$ кратности k , то уравнение Эйлера имеет $2k$ линейно независимых решений вида

$$x^{\alpha} \cos(\beta \ln x), x^{\alpha} \ln x \cos(\beta \ln x), \dots, x^{\alpha} (\ln x)^{k-1} \cos(\beta \ln x),$$

$$x^{\alpha} \sin(\beta \ln x), x^{\alpha} \ln x \sin(\beta \ln x), \dots, x^{\alpha} (\ln x)^{k-1} \sin(\beta \ln x).$$

Замечание 3. В записи общего решения уравнения Эйлера, рассматриваемого при любых $x \neq 0$, переменную x следует заменить на $|x|$.

№ 589 [Ф]: $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$

(589)

Для построения фундаментальной системы решений будем искать решение заданного уравнения в виде $y = x^{\lambda}$. Подставив это выражение в (589), будем иметь

$$x^2 \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)x^{\lambda-2} - 4x \lambda x^{\lambda-1} + 6x^{\lambda} = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 1) - 4\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, которым соответствуют два линейно независимых решения за-

данного уравнения x^2 и x^3 . Следовательно, общим решением уравнения (589) будет

$$y = C_1 x^2 + C_2 |x|^3,$$

которое в силу произвольности C_2 можно записать и так

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Неоднородное уравнение Эйлера

Для неоднородного уравнения Эйлера, когда $f(x) = P(\ln x)x^\alpha$, где P – полином, частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов (учитывая, что замена $x = e^t$ приводит правую часть к виду $g(t) = P(t)e^{\alpha t}$, и при определении вида частного решения используются [правила](#), рассмотренные на занятии 7). В общем случае для решения неоднородного уравнения (1) следует вначале найти функции y_1, y_2, \dots, y_n , образующие фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Затем воспользоваться **методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа)**. При этом общее решение неоднородного уравнения (1) ищется в виде:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i, \quad (3)$$

где функции $c_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \dots + c_n'(x)y_n = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \dots + c_n'(x)y_n' = 0, \\ \dots \dots \dots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{x^n}. \end{cases} \quad (4)$$

✓ Обратите внимание на правую часть последнего уравнения системы (4). Здесь в знаменателе – коэффициент при $y^{(n)}$ из левой части уравнения (1).

№ 593 [Ф]: $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$. (593)

1 способ. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $x^2 y'' - xy' + y = 0$. Построив характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0,$$

и установив его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, получим общее решение соответствующего однородного уравнения в виде $y_{одн} = C_1 x + C_2 x \ln |x|$.

Частное решение уравнения (593) можно найти методом неопределенных коэффициентов, если искать его в виде² $y_{ч} = Ax^3$. Подстановка этого выражения в заданное уравнение дает:

$$x^2 \cdot 6Ax - x \cdot 3Ax^2 + Ax^3 = 8x^3, \quad 4Ax^3 = 8x^3 \rightarrow A = 2.$$

Следовательно, $y_{ч} = 2x^3$. И тогда общим решением уравнения (593) будет

$$y = y_{одн} + y_{ч} = x(C_1 + C_2 \ln |x|) + 2x^3.$$

2 способ. Решение неоднородного уравнения можно построить и [методом вариации произвольных постоянных](#). Будем искать решение неоднородного уравнения (593) в виде:

$$y = c_1(x)x + c_2(x)x \ln |x|. \quad (593.1)$$

² Вид частного решения будет легче определить, если предварительно в правой части уравнения выполнить замену $x = e^t$. Так как $f(x) = 8x^3 = 8e^{3t}$ и $a = 3 \neq \lambda_{1,2}$, то, по [правилу 1](#), будем иметь $y_{ч} = Ae^{3t} = Ax^3$.

Для нахождения коэффициентов $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составим систему вида (4):

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)x \ln |x| = 0, \\ c_1'(x) + c_2'(x)(1 + \ln |x|) = 8x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) \ln |x| = 0, \\ c_2'(x) = 8x. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $c_1'(x) = -8x \ln |x|$ и $c_2'(x) = 8x$. И после интегрирования будем иметь

$$c_1(x) = -4x^2 \ln |x| + 2x^2 + C_1, \quad c_2(x) = 4x^2 + C_2.$$

Подставив найденные для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ выражения в (593.1), получим общее решение заданного уравнения $y = x(C_1 + C_2 \ln |x|) + 2x^3$.

№ 595 [Ф]: $x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x$. (595)

Уравнение рассматривается при $x > 0$. Поделив его правую и левую части на x , получим уравнение Эйлера:

$$x^2 y'' - 2y = \frac{6 \ln x}{x}. \quad (595.1)$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x^2.$$

Решение неоднородного уравнения (595.1) найдем методом Лагранжа. При этом решение будем искать в виде

$$y = c_1(x) \frac{1}{x} + c_2(x) x^2. \quad (595.2)$$

Для нахождения коэффициентов $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составим систему вида (4):

$$\begin{cases} \frac{c_1'(x)}{x} + c_2'(x)x^2 = 0, \\ -\frac{c_1'(x)}{x^2} + 2c_2'(x)x = \frac{6 \ln x}{x^3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x^3 = 0, \\ -c_1'(x) + 2c_2'(x)x^3 = \frac{6 \ln x}{x}, \end{cases}$$

решив которую, найдем

$$c_1'(x) = -\frac{2 \ln x}{x}, \quad c_2'(x) = \frac{2 \ln x}{x^4}.$$

После интегрирования полученных уравнений, найдем

$$c_1(x) = -\ln^2 x + C_1, \quad c_2(x) = -\frac{2 \ln x}{3x^3} - \frac{2}{9x^3} + C_2.$$

Подставив найденные для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ выражения в (595.2), получим общее решение заданного уравнения

$$y = \frac{C_1 - \ln^2 x}{x} + \left(C_2 - \frac{2 \ln x}{3x^3} - \frac{2}{9x^3} \right) x^2,$$

которое можно привести к виду³

$$y = C_2 x^2 + \frac{1}{x} \left(C_1 - \frac{2}{3} \ln x - \ln^2 x \right).$$

Замечание. Можно найти частное решение уравнения (595.1) методом неопределенных коэффициентов. Правая часть уравнения (595.1) после замены $x = e^t$ примет вид $g(t) = be^{-t}t$. Так как $a = -1$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y_q = t(At + B)e^{-t} = \frac{\ln x(A \ln x + B)}{x} = \frac{A \ln^2 x + B \ln x}{x}.$$

³ Здесь, в силу произвольности C_1 , после приведения подобных слагаемых коэффициент $C_1 - \frac{2}{3}$ заменен на C_1 .



Домашнее задание

[Ф] №№ 590, 592, 594, 596.

[Примерный вариант КР-3 \(часть 1\)](#)