[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

Занятие № 1 | № 2 | № 3

9.02.2024

Занятие № 1

Уравнения 1-порядка (повторение)

№ 301 [Ф]: $xy' + x^2 + xy - y = 0.$ (301.1)

Уравнение является линейным неоднородным. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$xy' + y(x-1) = 0.$$

Решая его как уравнение с разделяющимися переменными, получим $y = Cxe^{-x}$. Далее применим метод вариации произвольной постоянной:

$$x\left(C'(x)xe^{-x} + C(x)e^{x} - C(x)xe^{-x}\right) + C(x)xe^{-x}(x-1) + x^2 = 0,$$

$$x^2e^{-x}C'(x) = -x^2, \quad C'(x) = -e^{x}, \quad C(x) = -e^{x} + C_1, \quad C_1 \in R.$$

Следовательно, $y = C(x)xe^{-x} = -x + C_1xe^{-x}, \quad C_1 \in R.$

Ответ: $\boxed{y = x(Ce^{-x} - 1).}$

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

При решении такого уравнения можно попытаться разрешить его относительно производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. получить одно или несколько уравнений, разрешенных относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2}$$

Полученные уравнения решаются рассмотренными ранее методами.

Задача Коши для уравнения (1) с условием $y(x_0) = y_0$ **имеет единственное решение** (точка $(x_0; y_0)$ является *точкой единственности* решения), **если не существует двух интегральных кривых уравнения (1), которые бы проходили через точку** $(x_0; y_0)$ **и имели бы в этой точке общую касательную**. В противном случае в точке $(x_0; y_0)$ единственность решения задачи Коши нарушается (точка $(x_0; y_0)$ является точкой неединственности решения задачи Коши).

Уравнения вида (1) могут иметь **особые** решения, т.е. такие решения, соответствующая интегральная кривая которых целиком состоит из точек неединственности.

Задание 1. Решить уравнение $(y')^2 - 1 = 0$ и нарисовать его интегральные кривые. Нарушается ли в каких-либо точках плоскости $x\mathrm{O}y$ единственность решения этого уравнения?

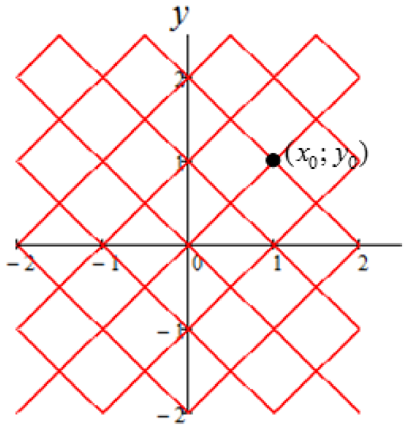
Для заданного уравнения имеем

$$(y')^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y' = 1, \\ y' = -1. \end{array}\right.$$

Решениями уравнений являются соответственно два семейства функций:

$$y = x + C \text{ и } y = -x + C,$$

графики которых определяют два семейства интегральных кривых заданного уравнения (см. рис.). Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости $x\mathrm{O}y$ проходят две интегральные кривые заданного уравнения:



$$y - y_0 = x - x_0 \text{ и } y - y_0 = -x + x_0.$$

Так как эти интегральные кривые пересекаются под прямым углом, то единственность решения не нарушается.

№ 241 [Ф]: $(y')^2 - y^2 = 0$ (241.1)

Заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$y' = y \text{ и } y' = -y,$$

интегрируя которые найдем два семейства функций

$$y = Ce^{x} \text{ и } y = Ce^{-x},\ C \in R,$$

определяющих решения заданного уравнения. При $C = 0$ оба семейства определяют решение $y = 0$. Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 1.

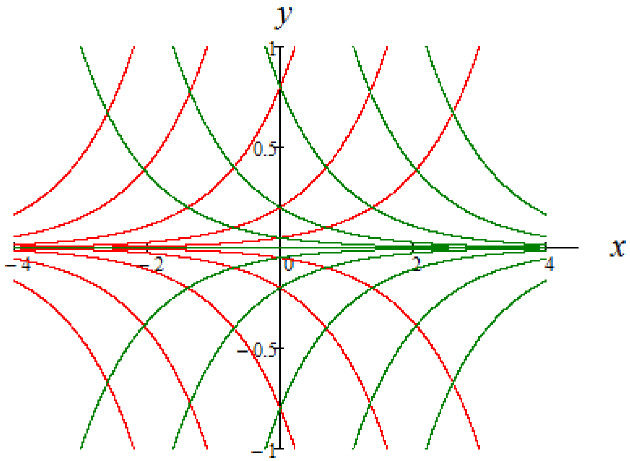


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (241.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости xOy, за исключением принадлежащих оси x, проходят две интегральные кривые. Но так как касательные к интегральным кривым, проведенные в точке $(x_0; y_0)$, не совпадают, а через точки оси x проходит одна интегральная кривая, то все точки плоскости являются точками единственности.

Ответ: $\boxed{y = Ce^{\pm x}, \quad C \in R.}$

№ 242 [Ф]: $8(y')^3 = 27y$ (242.1)

Разрешив заданное уравнение относительно производной, получим уравнение

$$y' = \frac{3}{2} y^{1/3}.$$

Очевидно, $y = 0$ является решением. Остальные решения найдем, применяя метод разделения переменных:

$$\frac{2}{3}\frac{dy}{y^{1/3}} = dx, \quad y^{2/3} = x + C, \quad y^2 = (x+C)^3, \ C \in R.$$

Таким образом, заданное уравнение имеет решения:

$$y^2 = (x+C)^3, \ C \in R, \quad y = 0.$$

Соответствующие им интегральные кривые показаны на рис. 2.

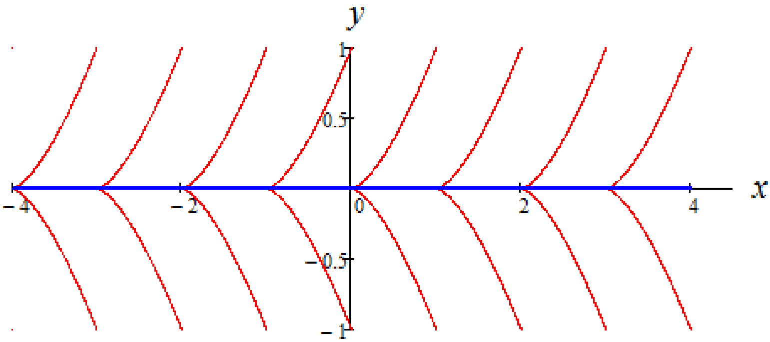


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (242.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости, за исключением принадлежащих оси x, проходит одна интегральная кривая. Решение y = 0 является особым.

Ответ: $\boxed{y^2 = (x+C)^3, \quad C \in R, \ y = 0.}$

№ 244 [Ф]: $y^2\left((y')^2 + 1\right) = 1$ (244.1)

Заметим, что y = 0 не является решением заданного уравнения, для которого имеем

$$(y')^2 = \frac{1-y^2}{y^2} \Leftrightarrow y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \ y \in [-1; \ 1].$$

Очевидно, y = ± 1 – решения уравнения. Остальные решения находятся методом разделения переменных, получив общий интеграл

$$x + C = \pm\sqrt{1 - y^2} \iff y^2 + (x + C)^2 = 1,\ C \in R.$$

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 3.

Интегральные кривые, описываемые уравнением $x + C = \sqrt{1 - y^2}$, – правые части окружностей с центрами в точках ($-C$, 0) ($C \in \mathrm{R}$). Интегральные кривые, описываемые уравнением $-(x + C) = \sqrt{1 - y^2}$, – левые части окружностей с центрами в точках ($-C$, 0) ($C \in \mathrm{R}$).

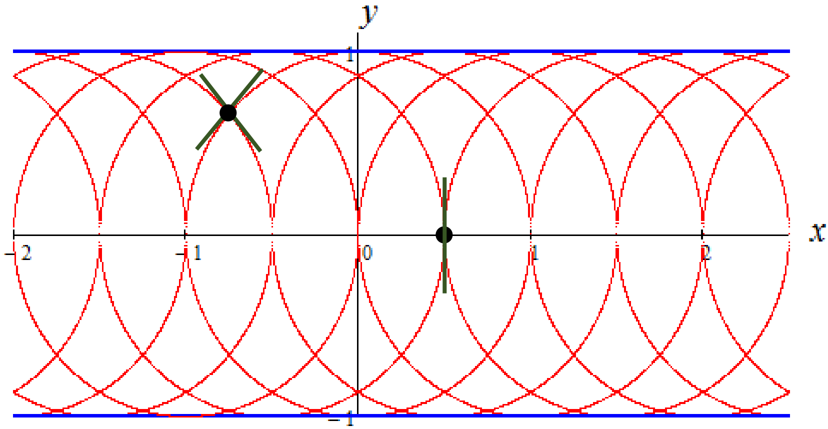


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (244.1)

Через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости, ограниченной прямыми y = ±1 проходят две интегральные кривые. Но только точки на прямых y = ±1 и y = 0 являются точками неединственности. Решения y = ±1 являются особыми.

Ответ: $\boxed{(x + C)^2 + y^2 = 1,\quad C \in R,\quad y = \pm 1.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 243, 246, 252; [М] № 527: $(y')^3 - \dfrac{y'}{4x} = 0$

16.02.2024

Занятие № 2

№ 249 [Ф]: $(y')^3 + y^2 = yy'(y'+1)$ (249.1)

Для заданного уравнения имеем

$$(y')^3 + y^2 = yy'(y'+1),\ \ (y')^3 - y(y')^2 + y^2 - yy' = 0,$$

$$(y')^2(y'-y) - y(y'-y) = 0,\quad (y'-y)((y')^2 - y) = 0.$$

Получаем, что уравнение (249.1) равносильно совокупности следующих уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} y'-y = 0, & (1) \\ y' = \sqrt{y},\ \ y \ge 0, & (2) \\ y' = -\sqrt{y},\ \ y \ge 0. & (3) \end{array}\right.$$

Интегрируя первое, найдем его общее решение

$$y = Ce^x,\ C \in R.$$

Интегрируя два других, найдем

$$2\sqrt{y} = \pm(x + C),\quad y = 0.$$

Так как

$$2\sqrt{y} = \pm(x + C) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{(x + C)^2}{4}, \tag{4}$$

то нетрудно установить, что семейство парабол (4) имеет огибающую y = 0, которая является особым решением уравнений (2) и (3), а, следовательно, и особым решением заданного уравнения (249.1). (**Заметим, что решение y = 0 является частным для уравнения (1)).**

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 4.

Замечание. Уравнению (2) соответствуют интегральные кривые, которые являются правыми ветвями парабол:

$$y = \frac{(x + C)^2}{4},\ \ x \ge -C,\ \forall C.$$

Уравнению (3) соответствуют интегральные кривые, которые являются левыми ветвями парабол:

$$y = \frac{(x+C)^2}{4}, \quad x \le -C, \ \forall C.$$

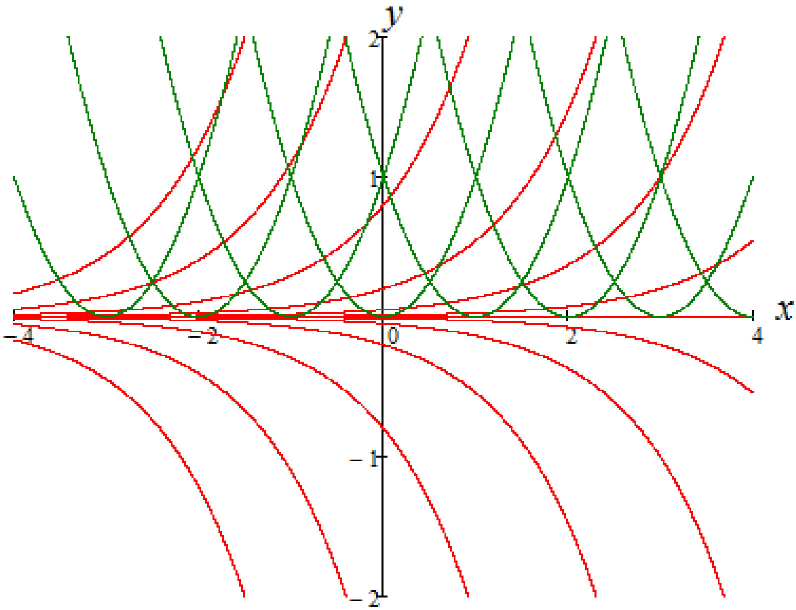


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (249.1)

Ответ: $\boxed{y = Ce^x, \quad 4\text{y} = (x+C)^2, \quad C \in R; \quad y = 0 - \text{ особое решение.}}$

№ 251 [Ф]: $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$ (251.1)

Для заданного уравнения имеем

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy', \quad (y')^2 - y^2 = x(y' - y),$$

$$(y' - y)(y' + y - x) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух линейных уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} y'-y=0, & (1) \\ y'+y-x=0. & (2) \end{array}\right.$$

Уравнение (1) является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение

$$y = Ce^{x},\ C \in R.$$

Уравнение (2) является линейным неоднородным и может быть решено, например, сведением к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = x - y$. Общим решением уравнения (2) является

$$y = Ce^{-x} + x - 1,\ C \in R.$$

Оба найденных решений дают множество решений заданного уравнения. Его общий интеграл можно записать в виде:

$$(y - Ce^{x})(y - Ce^{-x} - x + 1) = 0,\quad C \in R.$$

Интегральные кривые заданного уравнения (251.1) показаны на рис. 5.

Замечание. Можно показать, что заданное уравнение не имеет особых решений, используя следующий способ.

Пусть функция $F = F(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$. Геометрическое место точек $\varphi(x, y) = 0$, получаемых путем исключения y' из уравнений

$$F(x, y, y') = 0,\quad \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0,$$

Называется *дискриминантной кривой* дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$. Следует проверить, является ли дискриминантная кривая, удовлетворяющая этому уравнению, особым решением, т. е. касаются ли ее в каждой точке другие решения.

Для рассматриваемого уравнения (251.1) условия для определения дискриминантной кривой имеют вид

$$\begin{cases} F(x,y,y') = (y')^2 + xy - y^2 - xy' = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y' - x = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y' = \dfrac{x}{2}, \\ y = \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Несовместность полученных условий позволяет сделать вывод, что нет дискриминантных кривых, удовлетворяющих заданному уравнению. Следовательно, и нет особых решений.

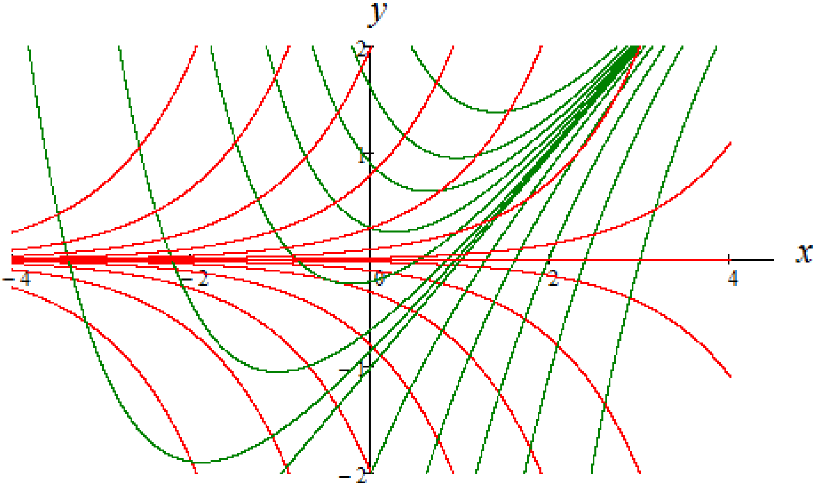


Рис. 5. Интегральные кривые уравнения (251.1)

Ответ: $\boxed{y = Ce^{x},\ \ y = Ce^{-x} + x - 1.}$

№ 528 [М]: Проинтегрировать уравнение

$$(y')^3 - x(y')^2 - 4yy' + 4xy = 0 \qquad (528.1)$$

Выделить интегральные кривые, проходящие через точки $M_1(0;1)$, $M_2(1;0)$, $M_3(0;0)$.

Разрешим заданное уравнение относительно y':

$$(y')^2(y'-x) - 4y(y'-x) = 0 \Leftrightarrow (y'-x)((y')^2 - 4y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y'-x=0, & (1) \\ y'=2\sqrt{y},\ y\ge 0, & (2) \\ y'=-2\sqrt{y},\quad y\ge 0. & (3) \end{array}\right.$$

Интегрируя первое, найдем его общее решение

$$y = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in R.$$

Интегрируя два других, найдем

$$\sqrt{y} = \pm(x+C), \quad y = 0.$$

Так как

$$\sqrt{y} = \pm(x+C) \quad \Leftrightarrow \quad y = (x+C)^2, \qquad (4)$$

и семейство парабол (4) имеет огибающую $y = 0$, то $y = 0$ является особым решением заданного уравнения.

Таким образом установили все решения заданного уравнения:

1) семейство парабол $y = \dfrac{x^2}{2} + C$,
2) семейство правых ветвей парабол $y = (x+C)^2$,
3) семейство левых ветвей парабол $y = (x+C)^2$,
4) особое решение $y = 0$.

Интегральные кривые заданного уравнения показаны на рис. 6.

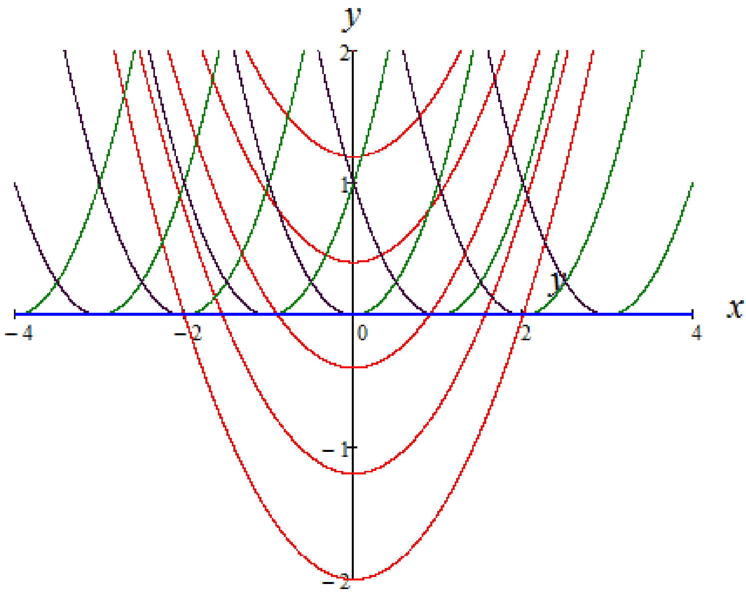


Рис. 6. Интегральные кривые уравнения (528.1)

Через точку $M_1(0;1)$ проходят следующие интегральные кривые из первых трех семейств (рис. 7):

$$y = \frac{x^2}{2} + 1; \quad y = (x+1)^2, \ x \ge -1; \quad y = (x-1)^2, x \le 1.$$

При этом для каждой интегральной кривой соответственно имеем:

$$y'(0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \quad y'(0) = \frac{d}{dx}(x+1)^2\Big|_{x=0} = 2,$$

$$y'(0) = \frac{d}{dx}(x-1)^2\Big|_{x=0} = -2.$$

Точка $(x_0; y_0)$ является точкой единственности уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (*)$$

если можно указать такую окрестность точки $(x_0; y_0)$, через каждую точку которой проходит столько интегральных кривых уравнения (*), сколько направлений поля определяется уравнением (*) в точке $(x_0; y_0)$.

Вывод: точка $M_1(0;1)$ – точка единственности (рис. 7).

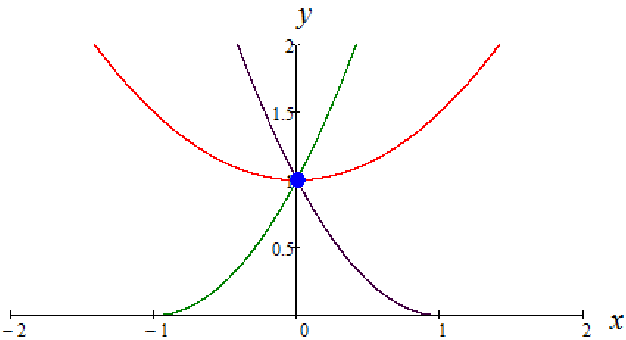


Рис. 7. Интегральные кривые уравнения (528.1), проходящие через точку M_1

Через точку $M_2(1;0)$ проходят следующие интегральные кривые из перечисленного выше множества (рис. 8):

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}; \quad y = (x-1)^2, x \le 1; \quad y = (x-1)^2, x \ge 1; \quad y = 0.$$

Т.е. через точку M_2 проходят 4 интегральные кривые, но при этом для каждой интегральной кривой соответственно имеем:

$$y'(1) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)\Bigg|_{x=1} = 1, \quad y'(1) = \frac{d}{dx}(x-1)^2\Big|_{x=1} = 0,$$

$$y'(1) = \frac{d}{dx}(x-1)^2\Big|_{x=1} = 0, \;\; y'(1) = 0.$$

Вывод: так как в точке M_2 определено два различных направления, а не 4, то точка не является точкой единственности (рис. 8).

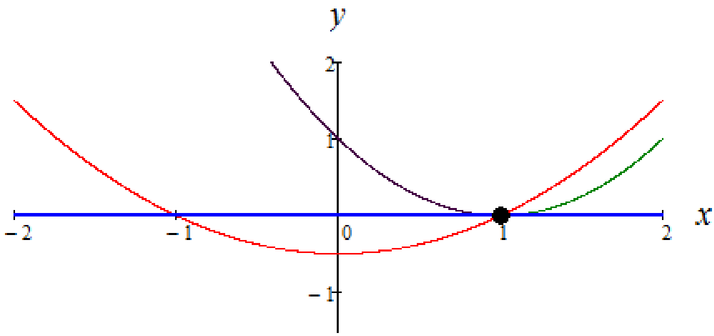


Рис. 8. Интегральные кривые уравнения (528.1), проходящие через точку M_2

Через точку $M_3(0;0)$ проходят следующие интегральные кривые (рис. 9):

$$y = \frac{x^2}{2}; \quad y = x^2,\ x \ge 0;\ y = x^2,\ x \le 0;\ y = 0.$$

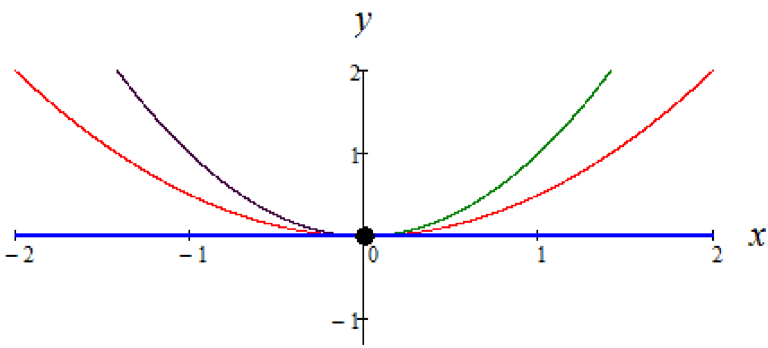


Рис. 9. Интегральные кривые уравнения (528.1), проходящие через точку M_3

Через точку M_3 проходит не одна интегральная кривая, но для каждой через эту точку проходит одна и та же касательная $y = 0$.

Вывод: точка M_3 не является точкой единственности.

Ответ: $\boxed{y=\dfrac{x^2}{2}+C,\quad y=(x+C)^2,\quad C\in R,\quad y=0.}$

№ 310 [Ф]: $(y')^2+2(x-1)y'-2y=0$ (310.1)

Разрешим уравнение, рассматривая его как квадратное относительно y'. В результате получим два уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} y'=-(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+2y}, \\ y'=-(x-1)-\sqrt{(x-1)^2+2y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y'+(x-1)=\sqrt{(x-1)^2+2y}, \\ y'+(x-1)=-\sqrt{(x-1)^2+2y}. \end{array}\right.$$

Выполнив замену $u=(x-1)^2+2y$, получим:

$$\left[\begin{array}{l} u'=2\sqrt{u}, \\ u'=-2\sqrt{u}. \end{array}\right.$$

Интегрируя полученные уравнения, найдем:

$$u=0,\quad \sqrt{u}=\pm(x+C).$$

Возвращаясь к замене, получим множество решений заданного уравнения:

$$(x-1)^2+2y=0,\quad \sqrt{(x-1)^2+2y}=\pm(x+C).$$

Так как

$$\sqrt{(x-1)^2+2y}=\pm(x+C) \quad\Leftrightarrow\quad 2y=(x+C)^2-(x-1)^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2y=(C+1)(2x+C-1),$$

то ответ можно записать следующим образом:

Ответ: $\boxed{2y=(C+1)(2x+C-1);\quad 2y=-(x-1)^2.}$

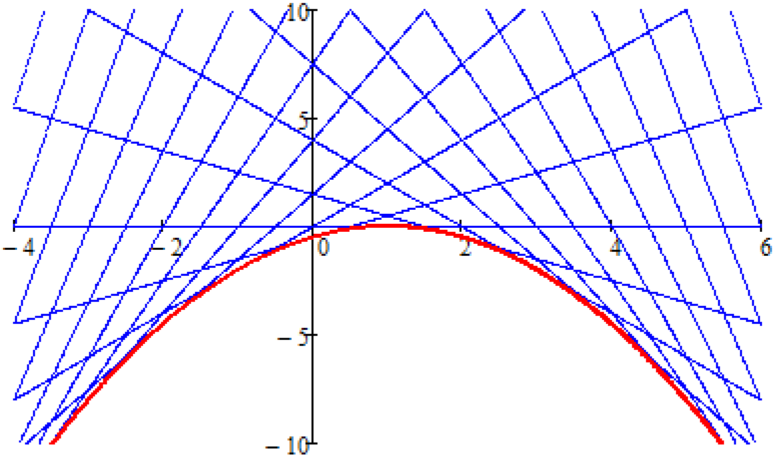


Рис. 10. Интегральные кривые уравнения (310.1)

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра

Не всегда уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

разрешается относительно производной y', а, если и разрешается, то не всегда полученные при этом уравнения $y' = f_i(x, y)$ легко интегрируются. В этих случаях для решения уравнения (1) можно применить **метод введения параметра**. Он позволяет свести уравнение (1) к уравнению, разрешенному относительно производной. Рассмотрим вариант этого метода для случая, когда уравнение (1) легко разрешается относительно y или относительно x[1].

[1] Другие варианты применения метода см., например, в кн.: *Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004* (гл. III, § 2).

1. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $x = f(y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$x = f(y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = pdx, \\ x = f(p). \end{cases}$$

При этом

$$dy = pd(f(p)), \quad dy = pf'(p)dp.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$y = \int pf'(p)dp + C.$$

В результате получаем решения исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int pf'(p)dp + C. \end{cases}$$

Если возможно, то исключаем параметр, получив общее решение рассматриваемого уравнения в одном из следующих видов:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad y = \varphi(x, C), \quad x = \varphi(y, C).$$

2. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $y = f(y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$y = f(y') \Leftrightarrow \begin{cases} dy = pdx, \\ y = f(p). \end{cases}$$

При этом

$$d(f(p)) = pdx \qquad f'(p)dp = pdx.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C.$$

В результате получаем решение исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C, \\ y = f(p). \end{cases}$$

Если p = 0 является решением уравнения $f'(p)dp = pdx$, то к найденному решению следует добавить и решение $y = f(0)$.

3. Пусть уравнение (1) можно привести к виду $x = f(y, y')$. Тогда введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$x = f(x, y') \iff \begin{cases} dy = pdx, \\ x = f(y, p). \end{cases}$$

При этом

$$dy = pd(f(y, p)), \qquad dy = p\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp\right).$$

Если найдем решения полученного уравнения в виде $y = \Phi(x, C)$, то решение исходного уравнения получим в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = f(y, p), \\ y = \Phi(p, C). \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения проводятся и в случае, когда уравнение (1) можно привести к виду $y = f(x, y')$.

№ 267 [Ф]: $x = (y')^3 + y'$. (267.1)

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = pdx, \\ x = p^3 + p, \end{cases} \qquad \begin{cases} dy = pd(p^3 + p) = (3p^3 + p)dp, \\ x = p^3 + p, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = p^3 + p, \\ y = \dfrac{3}{4}p^4 + \dfrac{1}{2}p^2 + C. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{x = p^3 + p, \quad 4y = 3p^4 + 2p^2 + C, \quad C \in R.}$

№ 272 [Ф]: $y = \ln(1 + (y')^2).$ (272.1)

1 способ. Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p\,dx \\ y = \ln(1+p^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} d(\ln(1+p^2)) = p\,dx, \\ y = \ln(1+p^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2p}{1+p^2}dp = p\,dx, \\ y = \ln(1+p^2). \end{cases}$$

Решая уравнение $\dfrac{2p}{1+p^2}dp = p\,dx$, найдем:

$$p = 0; \quad x = 2\operatorname{arctg} p + C.$$

Следовательно, получили следующие решения заданного уравнения:

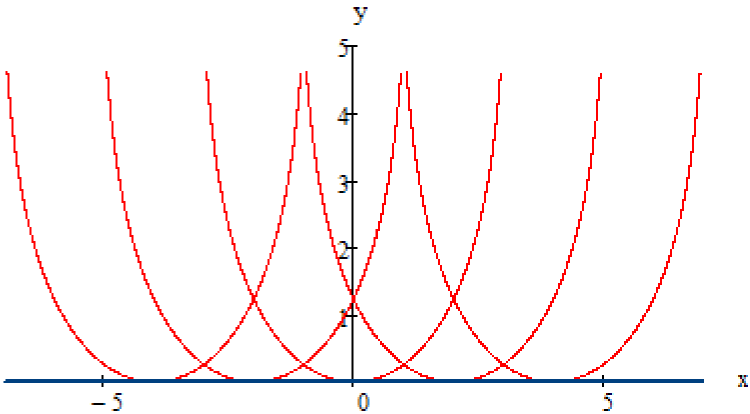
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ x = 2\operatorname{arctg} p + C, \end{array}\right. \\ y = \ln(1+p^2), \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\operatorname{arctg} p + C, \\ y = \ln(1+p^2), \end{cases} \\ y = \ln(1) = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\boxed{x = 2\operatorname{arctg} p + C, \quad y = \ln(1+p^2), \quad C \in R; \quad y = 0.}$

Замечание: Решение можно записать и в явной форме, исключив параметр p следующим образом. Имеем

$$y = \ln(1+p^2) \quad \to \quad p = \pm(e^y - 1).$$

тогда $x = 2\operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{e^y - 1}\right) + C, \quad x = \pm 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^y - 1}\right) + C.$



Интегральные кривые уравнения (272.1)
(прямая y = 0 – особое решение, является огибающей семейства кривых (272.2))

2 способ. Разрешим заданное уравнение относительно производной, получим

$$y' = \pm\sqrt{e^y - 1}, \quad y \geq 0.$$

Очевидно, y = 0 является решением. Остальные решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = \pm dx, \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = \pm x + C.$$

Так как при $y > 0$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^y - 1}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^y - 1} + C,$$

то решения рассматриваемой пары уравнений, учитывая, что y > 0, можно записать следующим образом:

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{e^y - 1} = \pm x + C. \qquad (272.2)$$

Ответ: $\boxed{2\operatorname{arctg}\sqrt{e^y - 1} = \pm x + C,\ \ y > 0; \quad y = 0.}$

Домашнее задание

[Ф] №№ 269, 271.

Выполнить задания 1 и 2 домашней контрольной работы на тему «Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра». Срок сдачи работы **15 марта**

01.03.2024

Занятие № 3

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра

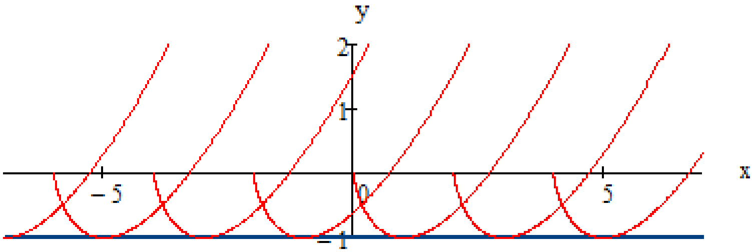
№ 274 [Ф]: $y = (y' - 1)e^{y'}$. (274.1)

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = p\,dx, \\ y = (p-1)e^{p}, \end{cases} \quad \begin{cases} d\left((p-1)e^{p}\right) = p\,dx, \\ y = (p-1)e^{p}, \end{cases} \quad \begin{cases} pe^{p}dp = p\,dx, \\ y = (p-1)e^{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ x = e^{p} + C, \end{array}\right. \\ y = (p-1)e^{p}, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = e^{p} + C, \\ y = (p-1)e^{p}; \end{cases} \\ y = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\boxed{x = e^{p} + C, \quad y = (p-1)e^{p}, \quad C \in R; \quad y = -1.}$



Интегральные кривые уравнения (274.1)
(прямая $y = -1$ – особое решение, является огибающей семейства кривых)

№ 278 [Ф]: $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y.$ (278.1)

Разрешив уравнение относительно y и введя параметр $p = y'$, будем иметь

$$\begin{cases} dy = pdx, \\ y = \dfrac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$\frac{1}{4}(2xdx + 2pdx + 2xdp - 2pdp) = pdx, \quad (x-p)(dx+dp) = 0.$$

Тогда одно решение заданного уравнения получим при $p=x$:

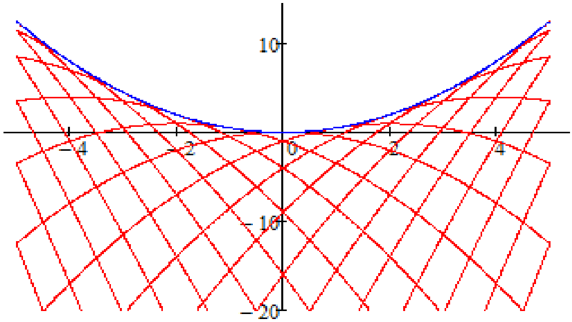
$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x^2 - x^2) = \frac{x^2}{2}.$$

Остальные решения находим, когда $dx + dp = 0$:

$$\begin{cases} dx + dp = 0, \\ y = \dfrac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases} \qquad \begin{cases} p = -x + C, \\ y = \dfrac{1}{4}(x^2 + 2xp - p^2). \end{cases}$$

Отсюда получим $4y = (C^2 - 2(x-C)^2).$

Ответ: $\boxed{4y = C^2 - 2(x-C)^2, \quad C \in R; \quad 2y = x^2.}$



Интегральные кривые уравнения (278.1)
(парабола $2y = x^2$ – огибающая семейства парабол $4y = C^2 - 2(x - C)^2$)

№ 287 [Ф]: $y = xy' - (y')^2.$ (287.1)

Введя параметр $p = y'$, будем иметь:

$$\begin{cases} dy = pdx, \\ y = xp - p^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} d\left(xp - p^2\right) = pdx, \\ y = xp - p^2. \end{cases}$$

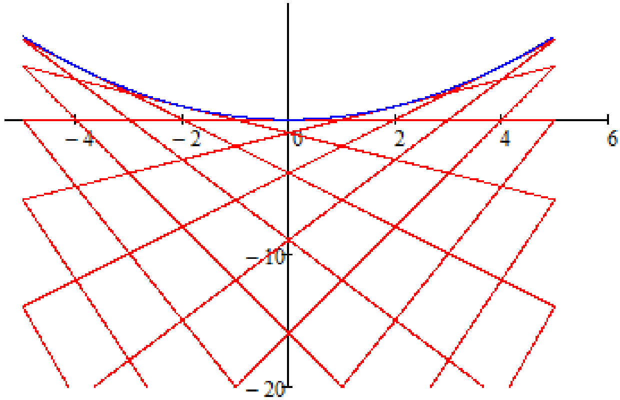
Для первого уравнения имеем

$$d\left(xp - p^2\right) = pdx, \quad xdp + pdx - 2pdp = pdx, \quad (x - 2p)dp = 0.$$

Полученное уравнение распадается на два $x - 2p = 0$ и $dp = 0$. Следовательно,

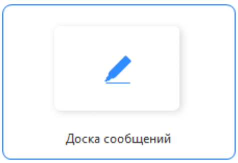
$$\begin{cases} d\left(xp - p^2\right) = pdx, \\ y = xp - p^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p = \dfrac{x}{2}, \\ p = C, \end{array}\right. \\ y = xp - p^2. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{y = Cx - C^2, \quad C \in R; \quad 4y = x^2.}$



Интегральные кривые уравнения (287.1)
(парабола $4y = x^2$ – огибающая семейства прямых $y = Cx - C^2$

Решение уравнений из примерного варианта контрольной работы



Записи с доски

Домашнее задание

[**Ф**] № **283.**

Выполнить задания домашней контрольной работы на тему «Уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра». Срок сдачи работы **15 марта**