



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsua.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. [djvu](#)

27.11.2023

Занятие № 12

Уравнения в полных дифференциалах



[Интегрирование уравнений в полных дифференциалах](#)

Уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует функция $u(x, y)$, для которой $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = C, \quad (2)$$

где C – произвольная постоянная. Будем считать, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области D (односвязная область, в которой рассматривается уравнение). Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, является выполнение тождества

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (3)$$

Задача решения уравнения в полных дифференциалах сводится к классической задаче математического анализа о *восстановлении функции двух переменных по ее дифференциалу*. Т.е. следует найти функцию, для которой:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \quad (4)$$

$$\text{№ 186 [\Phi]: } 2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0. \quad (186.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x,$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Следовательно, уравнение (186.1) является уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Составим условия (4) для определения функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 - y^2. \quad (186.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x, y) = x^2 y + \varphi(y), \quad (186.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (186.3) во второе условие системы (186.2), будем иметь

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2. \quad (186.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{3} y^3 + c,$$

где c – произвольная постоянная. Однако, при нахождении функции $\varphi(y)$ можно полагать $c = 0$. Итак, получили

$$u(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3} y^3,$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $x^2 y - \frac{1}{3} y^3 = C$ или $3x^2 y - y^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$

$$\text{№ 190 [Ф]: } \frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0. \quad (190.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{6x^2}{y^3}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{6x^2}{y^3},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{3x^2 + y^2}{y^2}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{2x^3 + 5y}{y^3}. \quad (190.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x, y) = \frac{x^3}{y^2} + x + \varphi(y), \quad (190.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (190.3) во второе условие (190.2), будем иметь

$$-\frac{2x^3}{y^3} + \varphi'(y) = -\frac{2x^3 + 5y}{y^3}. \quad (190.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -\frac{5}{y^2}, \quad \varphi(y) = \frac{5}{y} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (190.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{x^3}{y^2} + x + \frac{5}{y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C.$

$$\text{№ 191 [Ф]: } 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0. \quad (191.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}. \quad (191.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + \varphi(y), \quad (191.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3) во второе условие (191.2), будем иметь

$$-\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(y) = -\sqrt{x^2 - y}. \quad (191.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (191.3). В результате получим

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Замечание. Если интегрировать по y второе уравнение системы (191.2), то получим:

$$u(x, y) = \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + \psi(x), \quad (191.3')$$

где функция $\psi(x)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3') в первое уравнение системы (191.2), будем иметь

$$2x\sqrt{x^2 - y} + \psi'(x) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}). \quad (191.4')$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\psi(x)$:

$$\psi'(x) = 2x, \quad \psi(x) = x^2 + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\psi(x)$ выражение в (191.3'). В результате получим

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C.$

$$\text{№ 194 [Ф]:} \quad \left(\frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0. \quad (194.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{x \cos y}{\sin^2 y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{2x \cos y}{\cos 2y - 1} = -\frac{x \cos y}{\sin^2 y},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции $u(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sin y} + 2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} = -\frac{(x^2 + 1) \cos y}{2 \sin^2 y}. \end{cases} \quad (194.2)$$

Интегрируя по x первое уравнение, получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2 \sin y} + 2x + \varphi(y), \quad (194.3)$$

где функция $\varphi(y)$ подлежит определению. Для ее нахождения подставим (194.3) во второе условие (194.2), будем иметь

$$-\frac{x^2 \cos y}{2 \sin^2 y} + \varphi'(y) = -\frac{(x^2 + 1) \cos y}{2 \sin^2 y}. \quad (194.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = -\frac{\cos y}{2 \sin^2 y}, \quad \varphi(y) = \frac{1}{2 \sin y} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (194.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2 \sin y} + 2x + \frac{1}{2 \sin y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ:
$$\frac{x^2}{2 \sin y} + 2x + \frac{1}{2 \sin y} = C \quad \text{или} \quad x^2 + 1 = 2(C - 2x) \sin y.$$



Домашнее задание

[Ф] №№ 187, 189, 193.

Выполнить задания 1–4 примерного варианта [Контрольной работы № 1 \(часть 2\)](#) «Интегрирование уравнений линейных, в полных дифференциалах, уравнений Бернулли и Риккати»

Контрольная работа – 18.12.2023

04.12.2023

Занятие № 13

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Пусть уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Дифференцируемая функция $\mu = \mu(x, y) \neq 0$, после умножения на которую уравнение (1) становится уравнением в полных дифференциалах, называется **интегрирующим множителем** этого уравнения. Чтобы уравнение

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial[\mu P(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu Q(x, y)]}{\partial x}. \quad (3)$$

Соотношение (3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\mu(x, y)$. Это уравнение является линейным уравнением с частными производными первого порядка, которое можно записать в виде

$$Q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - P(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда достаточно легко найти решение уравнения (4), а, следовательно, и интегрирующий множитель уравнения (1).

Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель вида $\mu(x, y) = \mu(\omega(x, y))$, где $\omega(x, y)$ - известная функция, если дробь

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}}$$

является функцией от $\omega(x, y)$, т.е.

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}} = f(\omega(x, y)). \quad (5)$$

Тогда для нахождения интегрирующего множителя получим уравнение¹:

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu(\omega) \cdot f(\omega),$$

которое имеет решение

$$\mu(\omega) = C \cdot e^{\int f(\omega) d\omega}. \quad (6)$$

Полагая, $C = 1$, получим интегрирующий множитель уравнения (1).

В частности,

если выполнено условие,	то интегрирующий множитель является функцией
$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$	$\mu = \mu(x)$
$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = f(y)$	$\mu = \mu(y)$

¹ Следует из (4), так как по правилу дифференцирования сложной функции

имеем: $\frac{\partial \mu(\omega(x, y))}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mu(\omega(x, y))}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}$.

$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P} = f(x + y)$	$\mu = \mu(x + y)$
$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} = f(xy)$	$\mu = \mu(xy)$

Необходимо следить за тем, чтобы умножение уравнения (1) на интегрирующий множитель не приводило к потере решений и появлению посторонних решений.

$$\text{№ 354 [M]:} \quad \left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0. \quad (354.1)$$

Уравнение определено при $y \neq 0$ и не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} + 1\right) = -\frac{x}{y^2} \neq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} - 1\right) = \frac{1}{y}.$$

В этом случае

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{-P} = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot \frac{1}{-\left(\frac{x}{y} + 1\right)} = \frac{1}{y} = f(y).$$

Следовательно, интегрирующий множитель является функцией y и находится по формуле (6):

$$\mu(y) = Ce^{\int \frac{1}{y} dy} = C |y|.$$

Уравнение определено в совокупности полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$. В полуплоскости $y > 0$ удобно взять $C = 1$, а в полуплоскости $y < 0$

$C = -1$. Тогда для обеих полуплоскостей $\mu(y) = y$. После умножения на этот множитель уравнение (354.1) примет вид

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = x + y, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x - y. \quad (354.2)$$

Из первого равенства найдем

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y). \quad (354.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства (354.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = -y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (354.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + 2xy = C.$$

Ответ: $x^2 - y^2 + 2xy = C$.

Замечание. Уравнение (354.1) является однородным уравнением. С помощью замены $x = uy$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$(u + 1)ydu + (u^2 + 2u - 1)dy = 0.$$

$$\text{№ 355 [M]: } (x^2 + y)dx - xdy = 0. \quad (355.1)$$

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = -\frac{2}{x},$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Прежде, чем умножить заданное уравнение на $\mu(x)$, заметим, что $x = 0$ является решением уравнения (355.1). После умножения на интегрирующий множитель уравнение (355.1) примет вид

$$\left(1 + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{x}. \quad (355.2)$$

Из второго равенства найдем

$$u(x, y) = -\frac{y}{x} + \varphi(x). \quad (355.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства (355.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = x + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (355.3). В результате получим

$$u(x, y) = x - \frac{y}{x}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$x - \frac{y}{x} = C$$

который с ранее выделенным решением $x = 0$ дает ответ.

Ответ: $x - \frac{y}{x} = C; \quad x = 0.$

Замечание. Уравнение (355.1) является линейным относительно y . При $dx \neq 0$ уравнение можно привести к виду $xy' = y + x^2$ и решить, например, с помощью метода Лагранжа (метода вариации произвольной величины).

№ 358 [M]: $(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0. \quad (358.1)$

Здесь $P(x, y) = x \sin y + y \cos y$, $Q(x, y) = x \cos y - y \sin y$.

Так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = (x \cos y + \cos y - y \sin y - \cos y) \cdot \frac{1}{x \cos y - y \sin y} = 1,$$

то интегрирующий множитель является функцией x и находится по формуле (6), считая $C = 1$:

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (358.1) примет вид

$$e^x (x \cos y - y \sin y) dy + e^x (x \sin y + y \cos y) dx$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^x (x \sin y + y \cos y), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y). \end{cases} \quad (358.2)$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) + \varphi(y). \quad (358.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y) + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (358.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(y)$ выражение в (358.3). В результате получим

$$u(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y).$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C.$$

Ответ: $e^x (x \sin y - \sin y + y \cos y) = C.$

№ 195 [Ф]: $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0. \quad (195.1)$

Здесь $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$, $Q(x, y) = y$. Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Но так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = 2,$$

то существует интегрирующий множитель, который является функцией x и находится по формуле:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (195.1) примет вид

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах². Заметим, что так как $\mu(x) = e^{2x} \neq 0$, то при преобразовании заданного уравнения не происходит потеря решений или приобретение посторонних решений. В результате будем иметь

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^{2x}y. \end{cases} \quad (195.2)$$

Из второго равенства системы найдем

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}y^2}{2} + \varphi(x). \quad (195.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{2x}y^2 + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства системы (195.2) получим уравнение относительно функции $\varphi(x)$

² Проверка: $\frac{\partial(e^{2x}(x^2 + y^2 + x))}{\partial y} = 2ye^{2x}$, $\frac{\partial(e^{2x}y)}{\partial x} = 2ye^{2x}$.

$$\varphi'(x) = e^{2x}(x^2 + x), \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(e^{2x}x^2)}{dx} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{e^{2x}x^2}{2} + c,$$

где c – произвольная постоянная. Полагая $c = 0$, подставим найденное для $\varphi(x)$ выражение в (195.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}(x^2 + y^2)}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^{2x}(x^2 + y^2) = C. \quad (195.4)$$

Ответ: $e^{2x}(x^2 + y^2) = C$.



Домашнее задание

[Матвеев] № 356:

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

[Матвеев] № 354 (решить как однородное уравнение),

[Матвеев] № 355 (решить как линейное уравнение),

[Матвеев] № 357:

$$(xy^2 + y)dx - xdy = 0.$$

11.12.2023

Занятие № 14

Обзорное занятие

№№ 198, 199, 200, 201, 202



Домашнее задание

Выполнить задания примерного варианта [Контрольной работы № 1 \(часть2\)](#) «Интегрирование уравнений линейных, в полных дифференциалах, уравнений Бернулли и Риккати»

Контрольная работа – 18.12.2023