



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987.



[Занятие № 5](#)

[№ 6](#)

[№ 7](#)

**02.10.2023**

## Занятие № 5

№ 82 [Ф]: Кусок металла с температурой  $a$  градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от  $a$  до  $b$  градусов. При разности температур печи и металла в  $T$  градусов металл нагревается со скоростью  $kT$  градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

**Обозначим:**

$x(t)$  – температура куска металла через  $t$  минут после помещения в печь;

$y(t)$  – температура печи через  $t$  минут после начала повышения температуры.

Для  $y(t)$  имеем:

$$y(t) = \alpha t + \beta, \quad y(0) = a, \quad y(60) = b \quad \Rightarrow \quad y(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot t.$$

Тогда для  $x(t)$  будем иметь:

$$\begin{cases} x'(t) = k(y(t) - x(t)), \\ y(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot t, \\ x(0) = a. \end{cases} \quad (1)$$

Задача (1) имеет решение  $x(t) = a + \frac{b-a}{60} \cdot \left( t - \frac{1-e^{-kt}}{k} \right)$ .

Тогда  $x(60) = b - \frac{b-a}{60k} (1 - e^{-60k})$ .

## Однородные уравнения

### [Интегрирование однородных уравнений](#)

**Определение 1.** Функция  $F(x, y)$  называется **однородной**, если  $\forall \lambda > 0$  справедливо тождество  $F(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k F(x, y)$ . Число  $k$  называют **порядком** (или **степенью**) однородной функции.

#### Примеры

$\frac{x}{y}, \frac{x+2y}{3x-y}, \frac{x^2+4y^2}{x^2}$	– однородные функции нулевого порядка, $k = 0$
$x+y, \frac{2x^2-y^2}{x+2y}, \frac{3xy}{x-5y}$	– однородные функции порядка $k = 1$
$x^2 - 4xy, \frac{2x^3 - 2xy^2}{x+y}$	– однородные функции порядка $k = 2$

**Определение 2.** Уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

в котором правая часть  $f(x, y)$  является однородной функцией нулевого порядка, называют **однородным**.

Уравнение в дифференциалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

будет **однородным**, если функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  являются однородными одного и того же порядка.

При  $x \neq 0$ , полагая  $\lambda = \frac{1}{x}$ , уравнение (1) приводится к виду

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1')$$

а уравнение (2) – к виду:

$$m\left(\frac{y}{x}\right)dx + n\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \quad (2')$$

Здесь  $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ ,  $m\left(\frac{y}{x}\right) = M\left(1, \frac{y}{x}\right)$ ,  $n\left(\frac{y}{x}\right) = N\left(1, \frac{y}{x}\right)$ .

Уравнения (1') и (2') с помощью замены

$$z = \frac{y}{x} \quad (\text{т.е. } y = zx) \quad (3)$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Действительно. Так как  $y' = z + xz'$ , то уравнение (1') при замене (3) приводится к виду:

$$z + xz' = g(z) \Leftrightarrow xz' = g(z) - z. \quad (4)$$

Так как  $dy = zdx + xdz$ , то уравнение (2') при замене (3) приводится к виду

$$m(z)dx + n(z)(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (m(z) + zn(z))dx + xn(z)dz = 0. \quad (5)$$

(4) и (5) – уравнения с разделяющимися переменными.

**№ 101 [Ф]:**  $(x + 2y)dx - xdy = 0.$  (101.1)

Уравнение (101.1) является однородным, так как для функций  $M(x, y) = x + 2y$  и  $N(x, y) = -x$  имеем

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + 2\lambda y = \lambda(x + 2y) = \lambda M(x, y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x = \lambda N(x, y).$$

Функции  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  – однородные 1-го порядка.

Легко установить, что  $x = 0$  является решением заданного уравнения.

Поделив уравнение (101.1) на  $x$ , получим

$$\left(1 + \frac{2y}{x}\right)dx - dy = 0. \quad (101.2)$$

Замена  $y = zx$  в полученном уравнении дает:

$$(1 + 2z)dx - (zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (1 + z)dx - xdz = 0. \quad (101.3)$$

Одним из решений уравнения (101.3) является  $z = -1$ .

Найдем остальные решения уравнения (101.3). Разделив переменные в уравнении (101.3), будем иметь

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \ln|1+z| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Полученный общий интеграл уравнения (101.3) можно преобразовать следующим образом:

$$|1+z| = e^C |x|, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1+z = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (101.3) будет

$$z = Cx - 1, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (101.4)$$

**(решение  $z = -1$  получается при  $C = 0$ )**

Выполнив обратную замену в (101.4), получим общее решение уравнения (101.2).

Ответ:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = x(Cx - 1), \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{№ 103 [Ф]: } (y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0. \quad (103.1)$$

Функции  $M(x, y) = y^2 - 2xy$  и  $N(x, y) = x^2$  являются однородными порядка 2. Следовательно, заданное уравнение – однородное.

Одним из решений уравнения (103.1) является  $x = 0$ .

При  $x \neq 0$  поделив уравнение (103.1), получим:

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0. \quad (103.2)$$

Выполнив замену  $y = zx$ , будем иметь:

$$(z^2 - 2z)dx + xdz + zdx = 0, \quad z(z-1)dx + xdz = 0. \quad (103.3)$$

Очевидно,  $z = 0$  и  $z = 1$  являются решениями уравнения (103.3).

Разделяя переменные в (103.3), найдем остальные решения:

$$\frac{dz}{z(z-1)} = -\frac{dx}{x}, \quad \int\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = -\int\frac{1}{x}dx + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| = -\ln|x| + \ln|C|, \quad \frac{z-1}{z} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Получили все решения уравнения (103.3):

$$z = 0, \quad \frac{1}{z} = 1 - \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (103.4)$$

**(решение  $z = 1$  получается при  $C = 0$ )**

Выполнив обратную замену в (103.4), получим все решения уравнения (103.2):

$$y = 0, \quad x^2 = y(x - C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ x^2 &= y(x - C), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{№ 107 [\Phi]: } xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (107.1)$$

Заметим, что  $x \neq 0$ . При этом уравнение (107.1) можно привести к виду:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (107.2)$$

Уравнение (107.2) является однородным. Выполним в нем замену  $y = zx$ . В результате получим

$$z + xz' = z + \operatorname{tg} z, \quad xz' = \operatorname{tg} z. \quad (107.3)$$

Решая уравнение  $\operatorname{tg} z = 0$ , найдем решения уравнения (107.3)

$$z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

которые можем потерять при разделении переменных:

$$x \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} z, \quad \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\sin z = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Так как  $\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , то общим решением уравнения (107.3) является следующее  $\sin z = Cx, C \in \mathbb{R}$ . Выполнив обратную замену, получим

Ответ:  $\sin \frac{y}{x} = Cx, C \in \mathbb{R}.$



## Домашнее задание

[Ф] №№ 102, 104, 108.

9.10.2023

Занятие № 7



Однородные уравнения

$$\text{№ 109 [Ф]: } xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}. \quad (109.1)$$

Область определения уравнения описывает неравенство  $\frac{x+y}{x} > 0$ .

Поделив правую и левую часть уравнения (109.1) на  $x$ , получим

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x} \ln \frac{x+y}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln \left(1 + \frac{y}{x}\right). \quad (109.2)$$

Следовательно, уравнение (109.1) является однородным. Полагая  $y = zx$ , для уравнения (109.2) будем иметь

$$z'x + z = z + (1+z) \ln(1+z) \Leftrightarrow xz' = (1+z) \ln(1+z). \quad (109.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно,  $z = 0$  является решением уравнения.

Найдем остальные, разделяя переменные:

$$\frac{dz}{(1+z) \ln(1+z)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{(1+z) \ln(1+z)} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln |\ln(1+z)| = \ln |x| + C, \quad |\ln(1+z)| = C_1 |x|, \quad C_1 > 0,$$

$$\ln(1+z) = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (109.3) будет

$$\ln(1+z) = Cx, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (109.4)$$

**(решение  $z = 0$  получается при  $C = 0$ )**

Выполнив обратную замену в (109.4), получим общее решение уравнения (109.1).

Ответ:  $\ln \frac{x+y}{x} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$

**Замечание.** Так как  $\lim_{z \rightarrow -1^-} (z+1) \ln(1+z) = 0$ , то, если доопределить нулем правую часть уравнения (109.3) при  $z = -1$ , решением уравнения (109.3) будет и  $z = -1$ . Тогда и  $y = -x$  будет решением уравнения (109.1).

## Уравнения, приводящиеся к однородному

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (*)$$

если  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , с помощью подстановки  $y = u + \beta$ ,  $x = v + \alpha$ ,

где  $\alpha, \beta$  – решение системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v + b_1u}{a_2v + b_2u}\right).$$

Если  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ , то  $a_2 = ka_1$ ,  $b_2 = kb_1$ , и для уравнения (\*) будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y - c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = g(a_1x + b_1y). \quad (**)$$

Если  $b_1 \neq 0$ , то, выполнив в уравнении (\*\*) замену  $z = a_1x + b_1y$ , придем у уравнению

$$\frac{1}{b_1} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = g(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b_1g(z) + a_1.$$

$$\text{№ 114 [Ф]: } (2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0. \quad (114.1)$$

С помощью замены  $z = 2x + y$ ,  $y = z - 2x$ , уравнение (114.1) приводится к виду:

$$5(z - 1)dx - (2z - 3)dz = 0. \quad (114.2)$$



Очевидно,  $z = 1$  является решение. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$5dx - \frac{2z-3}{z-1} dz = 0, \quad \int 5dx - \int \frac{2z-3}{z-1} dz = C,$$

$$5x - \int \left( 2 - \frac{1}{z-1} \right) dz = C, \quad 5x - 2z + \ln|z-1| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Полученный общий интеграл можно привести к виду

$$z - 1 = C_1 e^{2z-5x}.$$

В результате получили общее решение уравнения (114.2) (**решение  $z = 1$  получается при  $C_1 = 0$** ).

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ , получим

Ответ:  $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$

**№ 116 [Ф]:**  $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$  (116.1)

Так как

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -1, \end{cases}$$

то с помощью подстановки

$$y = u - 1, \quad x = v + 4$$

уравнение (116.1) приводится к виду

$$(v + 4u) \frac{du}{dv} = 2v + 3u, \quad (v + 4u)du - (2v + 3u)dv = 0. \quad (116.2)$$

Полученное уравнение является однородным. Для его решения воспользуемся заменой  $u = zv$ . Так как  $du = vdz + zdv$ , то для уравнения (116.2) будем иметь

$$v(1 + 4z)(vdz + zdv) = v(2 + 3z)dv,$$

$$v(1 + 4z)dz = -2(2z^2 - z - 1)dv,$$

$$v(1+4z)dz = -2(2z+1)(z-1)dv. \quad (116.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно,  $z = 1$  и  $z = -1/2$  являются его решениями ( $v = 0$  является решением уравнения (116.3), но не является решением уравнения (116.2), поэтому оно исключается из дальнейшего рассмотрения). Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)} dz = -\frac{dv}{v}, \quad \int \frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)} dz = -\int \frac{dv}{v} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$\frac{4z+1}{2(2z+1)(z-1)} = \frac{1}{3(2z+1)} + \frac{5}{6(z-1)},$$

то для уравнения (116.3) получим общий интеграл

$$\frac{1}{6} \ln |2z+1| + \frac{5}{6} \ln |z-1| + \ln |v| = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

который можно преобразовать к виду

$$(2z+1)(z-1)^5 v^6 = C_1. \quad (116.4)$$

Таким образом, получили решение уравнения (116.3) в виде (116.4).

**(решения  $z = 1$  и  $z = -1/2$  получаются при  $C_1 = 0$ )**

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ :

$$z = \frac{u}{v} = \frac{y+1}{x-4},$$

Получим

$$\left(2 \frac{y+1}{x-4} + 1\right) \left(\frac{y+1}{x-4} - 1\right)^5 (x-4)^6 = C,$$

$$(2y+x-2)(y-x+5)^5 = C.$$

Ответ:  $(y-x+5)^5 (x+2y-2) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$



## Домашнее задание

[Ф] №№ 110, 115, 91, 113, 117.

Подготовка к [самостоятельной работе](#)

16.10.2023

Занятие № 7



Однородные уравнения

$$\text{№ 118 [Ф]: } y' = 2 \left( \frac{y+2}{x+y-1} \right)^2. \quad (118.1)$$

Так как  $x + y - 1 = x - 3 + y + 2$ , то с помощью замены

$$u = y + 2, \quad v = x - 3,$$

уравнение (118.1) приводится к виду

$$\frac{du}{dv} = 2 \left( \frac{u}{u+v} \right)^2 = 2 \left( \frac{u/v}{u/v+1} \right)^2. \quad (118.2)$$

Уравнение (118.2) является однородным. Для его решения воспользуемся заменой  $u = zv$ . Так как  $du = vdz + zdv$ , то для уравнения (118.2) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{vdz + zdv}{dv} &= 2 \left( \frac{z}{z+1} \right)^2, & v \frac{dz}{dv} &= 2 \left( \frac{z}{z+1} \right)^2 - z, \\ v \frac{dz}{dv} &= - \frac{z(z^2+1)}{(z+1)^2} \end{aligned} \quad (118.3)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно,  $z = 0$  является его решением. Остальные решения найдем, разделив переменные:

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} dz = -\frac{dv}{v}, \quad \int \frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} dz = -\ln|v| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$\frac{(1+z)^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1},$$

то будем иметь

$$\ln|z| + 2 \operatorname{arctg}(z) = -\ln|v| + C, \quad \ln|z| + \ln|v| = -2 \operatorname{arctg}(z) + C.$$

Полученный общий интеграл уравнения (118.3) можно привести к виду:

$$zv = C_1 e^{-2 \operatorname{arctg}(z)}.$$

Таким образом, получили общее решение уравнения (118.3) (**решение  $z = 0$  получается при  $C_1 = 0$** ).

Выполнив обратную замену  $z = \frac{u}{v} = \frac{y+2}{x-3}$ , получим ответ.

Ответ:  $y + 2 = C e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}}, \quad C \in \mathbb{R}.$  (118.4)

**№ 119 [Ф]:**  $(y'+1) \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}.$  (119.1)

Выполнив в уравнении (119.1) замену

$$z = \frac{y+x}{x+3} > 0, \quad y = z(x+3) - x, \quad y' = z'(x+3) + z - 1,$$

получим уравнение

$$(z'(x+3) + z) \ln z = z \Leftrightarrow z'(x+3) \ln z = z(1 - \ln z), \quad (119.2)$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Очевидно,  $z = e$  является решением уравнения (119.2). Найдем остальные решения, разделяя переменные:

$$\frac{\ln z}{z(\ln z - 1)} dz = -\frac{dx}{x+3}, \quad \int \frac{\ln z}{z(\ln z - 1)} dz = -\int \frac{dx}{x+3} + C, \quad C \in R,$$

$$\int \frac{\ln z}{\ln z - 1} d \ln z = -\ln |x+3| + C, \quad \ln z + \ln |\ln z - 1| = -\ln |x+3| + C.$$

Полученное решение можно преобразовать следующим образом:

$$\ln |\ln z - 1| = C - \ln(z|x+3|), \quad \ln z - 1 = \frac{C_1}{z(x+3)}.$$

Заметим, что при  $C_1 = 0$   $z = e$ .

Таким образом, общим решением уравнения (119.2) является:

$$\ln z - 1 = \frac{C}{z(x+3)}, \quad C \in R.$$

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ :

$$z = \frac{y+x}{x+3},$$

получим ответ.

Ответ:  $\ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{C}{y+x} + 1, \quad C \in R.$



### Домашнее задание

[Ф] №№ 113, 117, 120, 402, 91.

Подготовка к [самостоятельной работе](#)