



[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

URL: <http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf>

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. [djvu](#)

---

6.12.2022

## Занятие № 14

### Уравнения в полных дифференциалах



[Интегрирование уравнений в полных дифференциалах](#)

Уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует функция  $u(x, y)$ , для которой  $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ . Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = C, \quad (2)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Будем считать, что функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются непрерывно дифференцируемыми в области  $D$  (односвязная область, в которой рассматривается уравнение). Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, является выполнение тождества

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (3)$$

Задача решения уравнения в полных дифференциалах сводится к классической задаче математического анализа о *восстановлении функции двух переменных по ее дифференциалу*. Т.е. следует найти функцию, для которой:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \quad (4)$$

$$\text{№ 186 [\Phi]: } 2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0. \quad (186.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x,$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Следовательно, уравнение (186.1) является уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Составим условия (4) для определения функции  $u(x, y)$  :

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 - y^2. \quad (186.2)$$

Интегрируя по  $x$  первое уравнение, получим

$$u(x, y) = x^2 y + \varphi(y), \quad (186.3)$$

где функция  $\varphi(y)$  подлежит определению. Для ее нахождения подставим (186.3) во второе условие системы (186.2), будем иметь

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2. \quad (186.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения  $\varphi(y)$  :

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{3} y^3 + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Однако, при нахождении функции  $\varphi(y)$  можно полагать  $c = 0$ . Итак, получили

$$u(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3} y^3,$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ:  $x^2 y - \frac{1}{3} y^3 = C$  или  $3x^2 y - y^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$

$$\text{№ 190 [Ф]: } \frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0. \quad (190.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{6x^2}{y^3}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{6x^2}{y^3},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции  $u(x, y)$ :

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{3x^2 + y^2}{y^2}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{2x^3 + 5y}{y^3}. \quad (190.2)$$

Интегрируя по  $x$  первое уравнение, получим

$$u(x, y) = \frac{x^3}{y^2} + x + \varphi(y), \quad (190.3)$$

где функция  $\varphi(y)$  подлежит определению. Для ее нахождения подставим (190.3) во второе условие (190.2), будем иметь

$$-\frac{2x^3}{y^3} + \varphi'(y) = -\frac{2x^3 + 5y}{y^3}. \quad (190.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения  $\varphi(y)$ :

$$\varphi'(y) = -\frac{5}{y^2}, \quad \varphi(y) = \frac{5}{y} + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\varphi(y)$  выражение в (190.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{x^3}{y^2} + x + \frac{5}{y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ:  $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C.$

$$\text{№ 191 [Ф]: } 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0. \quad (191.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции  $u(x, y)$ :

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}. \quad (191.2)$$

Интегрируя по  $x$  первое уравнение, получим

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + \varphi(y), \quad (191.3)$$

где функция  $\varphi(y)$  подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3) во второе условие (191.2), будем иметь

$$-\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(y) = -\sqrt{x^2 - y}. \quad (191.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения  $\varphi(y)$ :

$$\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\varphi(y)$  выражение в (191.3). В результате получим

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

**Замечание.** Если интегрировать по  $y$  второе уравнение системы (191.2), то получим:

$$u(x, y) = \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + \psi(x), \quad (191.3')$$

где функция  $\psi(x)$  подлежит определению. Для ее нахождения подставим (191.3') в первое уравнение системы (191.2), будем иметь

$$2x\sqrt{x^2 - y} + \psi'(x) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}). \quad (191.4')$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения  $\psi(x)$  :

$$\psi'(x) = 2x, \quad \psi(x) = x^2 + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\psi(x)$  выражение в (191.3'). В результате получим

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ:  $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C.$

$$\text{№ 194 [Ф]:} \quad \left( \frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0. \quad (194.1)$$

Найдя частные производные

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{x \cos y}{\sin^2 y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{2x \cos y}{\cos 2y - 1} = -\frac{x \cos y}{\sin^2 y},$$

устанавливаем справедливость тождества (3). Составим условия (4) для определения функции  $u(x, y)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sin y} + 2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} = -\frac{(x^2 + 1) \cos y}{2 \sin^2 y}. \end{cases} \quad (194.2)$$

Интегрируя по  $x$  первое уравнение, получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2 \sin y} + 2x + \varphi(y), \quad (194.3)$$

где функция  $\varphi(y)$  подлежит определению. Для ее нахождения подставим (194.3) во второе условие (194.2), будем иметь

$$-\frac{x^2 \cos y}{2 \sin^2 y} + \varphi'(y) = -\frac{(x^2 + 1) \cos y}{2 \sin^2 y}. \quad (194.4)$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения  $\varphi(y)$ :

$$\varphi'(y) = -\frac{\cos y}{2 \sin^2 y}, \quad \varphi(y) = \frac{1}{2 \sin y} + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\varphi(y)$  выражение в (194.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2 \sin y} + 2x + \frac{1}{2 \sin y},$$

и по формуле (2) можно записать ответ.

Ответ: 
$$\frac{x^2}{2 \sin y} + 2x + \frac{1}{2 \sin y} = C \quad \text{или} \quad x^2 + 1 = 2(C - 2x) \sin y.$$



### Домашнее задание

[Ф] №№ 187, 189, 193.

Выполнить задания 1–4 примерного варианта [Контрольной работы № 1 \(часть 2\)](#) «Интегрирование уравнений линейных, в полных дифференциалах, уравнений Бернулли и Риккати»

**Контрольная работа – 20.12.2022**

15.12.2021

## Занятие № 15

### Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Пусть уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Дифференцируемая функция  $\mu = \mu(x, y) \neq 0$ , после умножения на которую уравнение (1) становится уравнением в полных дифференциалах, называется **интегрирующим множителем** этого уравнения. Чтобы уравнение

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться условие

$$\frac{\partial[\mu P(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu Q(x, y)]}{\partial x}. \quad (3)$$

Соотношение (3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\mu(x, y)$ . Это уравнение является линейным уравнением с частными производными первого порядка, которое можно записать в виде

$$Q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - P(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда достаточно легко найти решение уравнения (4), а, следовательно, и интегрирующий множитель уравнения (1).

**Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель вида  $\mu(x, y) = \mu(\omega(x, y))$ , где  $\omega(x, y)$  - известная функция, если дробь**

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}}$$

является функцией от  $\omega(x, y)$ , т.е.

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}} = f(\omega(x, y)). \quad (5)$$

Тогда для нахождения интегрирующего множителя получим уравнение<sup>1</sup>:

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu(\omega) \cdot f(\omega),$$

которое имеет решение

$$\mu(\omega) = C \cdot e^{\int f(\omega) d\omega}. \quad (6)$$

Полагая,  $C = 1$ , получим интегрирующий множитель уравнения (1).

В частности,

если выполнено условие,	то интегрирующий множитель является функцией
$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$	$\mu = \mu(x)$
$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = f(y)$	$\mu = \mu(y)$

<sup>1</sup> Следует из (4), так как по правилу дифференцирования сложной функции

имеем:  $\frac{\partial \mu(\omega(x, y))}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \mu(\omega(x, y))}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}$ .



$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P} = f(x + y)$	$\mu = \mu(x + y)$
$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} = f(xy)$	$\mu = \mu(xy)$

**Необходимо следить за тем, чтобы умножение уравнения (1) на интегрирующий множитель не приводило к потере решений и появлению посторонних решений.**

$$\text{№ 354 [M]: } \left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0. \quad (354.1)$$

Уравнение определено при  $y \neq 0$  и не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} + 1\right) = -\frac{x}{y^2} \neq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} - 1\right) = \frac{1}{y}.$$

В этом случае

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \frac{1}{-P} = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot \frac{1}{-\left(\frac{x}{y} + 1\right)} = \frac{1}{y} = f(y).$$

Следовательно, интегрирующий множитель является функцией  $y$  и находится по формуле (6):

$$\mu(y) = Ce^{\int \frac{1}{y} dy} = C |y|.$$

Уравнение определено в совокупности полуплоскостей  $y > 0$  и  $y < 0$ . В полуплоскости  $y > 0$  удобно взять  $C = 1$ , а в полуплоскости  $y < 0$

$C = -1$ . Тогда для обеих полуплоскостей  $\mu(y) = y$ . После умножения на этот множитель уравнение (354.1) примет вид

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = x + y, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x - y. \quad (354.2)$$

Из первого равенства найдем

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y). \quad (354.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства (354.2) получим уравнение относительно функции  $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = -y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\varphi(y)$  выражение в (354.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + 2xy = C.$$

**Ответ:**  $x^2 - y^2 + 2xy = C$ .

**Замечание.** Уравнение (354.1) является однородным уравнением. С помощью замены  $x = u$  у приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$(u + 1)ydu + (u^2 + 2u - 1)dy = 0.$$

$$\text{№ 355 [M]: } (x^2 + y)dx - xdy = 0.$$

(355.1)

Так как

$$\left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = -\frac{2}{x},$$

то интегрирующий множитель является функцией  $x$  и находится по формуле (6), считая  $C = 1$ :

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Прежде, чем умножить заданное уравнение на  $\mu(x)$ , заметим, что  $x = 0$  является решением уравнения (355.1). После умножения на интегрирующий множитель уравнение (355.1) примет вид

$$\left( 1 + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{x}. \quad (355.2)$$

Из второго равенства найдем

$$u(x, y) = -\frac{y}{x} + \varphi(x). \quad (355.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства (355.2) получим уравнение относительно функции  $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = x + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\varphi(x)$  выражение в (355.3). В результате получим

$$u(x, y) = x - \frac{y}{x}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$x - \frac{y}{x} = C$$

который с ранее выделенным решением  $x = 0$  дает ответ.

Ответ:  $x - \frac{y}{x} = C; \quad x = 0.$

**Замечание.** Уравнение (355.1) является линейным относительно  $y$ . При  $dx \neq 0$  уравнение можно привести к виду  $xy' = y + x^2$  и решить, например, с помощью метода Лагранжа (метода вариации произвольной величины).

**№ 358 [M]:**  $(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0. \quad (358.1)$

Здесь  $P(x, y) = x \sin y + y \cos y$ ,  $Q(x, y) = x \cos y - y \sin y$ .

Так как

$$\left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = (x \cos y + \cos y - y \sin y - \cos y) \cdot \frac{1}{x \cos y - y \sin y} = 1,$$

то интегрирующий множитель является функцией  $x$  и находится по формуле (6), считая  $C = 1$ :

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (358.1) примет вид

$$e^x (x \cos y - y \sin y) dy + e^x (x \sin y + y \cos y) dx$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^x (x \sin y + y \cos y), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y). \end{cases} \quad (358.2)$$

Из первого равенства системы найдем

$$u(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) + \varphi(y). \quad (358.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y) + \varphi'(y),$$

и с учетом второго равенства системы (358.2) получим уравнение относительно функции  $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\varphi(y)$  выражение в (358.3). В результате получим

$$u(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y).$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C.$$

Ответ:  $e^x (x \sin y - \sin y + y \cos y) = C.$

**№ 195 [Ф]:**  $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0. \quad (195.1)$

Здесь  $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$ ,  $Q(x, y) = y$ . Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Но так как

$$\left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{Q} = 2,$$

то существует интегрирующий множитель, который является функцией  $x$  и находится по формуле:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

После умножения на интегрирующий множитель уравнение (195.1) примет вид

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах<sup>2</sup>. Заметим, что так как  $\mu(x) = e^{2x} \neq 0$ , то при преобразовании заданного уравнения не происходит потеря решений или приобретение посторонних решений. В результате будем иметь

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^{2x}y. \end{cases} \quad (195.2)$$

Из второго равенства системы найдем

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}y^2}{2} + \varphi(x). \quad (195.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{2x}y^2 + \varphi'(x),$$

и с учетом первого равенства системы (195.2) получим уравнение относительно функции  $\varphi(x)$

---

<sup>2</sup> Проверка:  $\frac{\partial(e^{2x}(x^2 + y^2 + x))}{\partial y} = 2ye^{2x}$ ,  $\frac{\partial(e^{2x}y)}{\partial x} = 2ye^{2x}$ .

$$\varphi'(x) = e^{2x}(x^2 + x), \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(e^{2x}x^2)}{dx} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{e^{2x}x^2}{2} + c,$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Полагая  $c = 0$ , подставим найденное для  $\varphi(x)$  выражение в (195.3). В результате получим

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}(x^2 + y^2)}{2}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения можно представить в виде

$$e^{2x}(x^2 + y^2) = C. \quad (195.4)$$

Ответ:  $e^{2x}(x^2 + y^2) = C$ .



### Домашнее задание

[Матвеев] № 356:

$$\text{№ 356} \quad (2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

[Матвеев] № 354 (решить как однородное уравнение),

[Матвеев] № 357:

$$\text{№ 357} \quad (xy^2 + y)dx - xdy = 0.$$

**Контрольная работа – 20.12.2022**