[Ф] Филиппов А.В. **Сборник задач по дифференциальным уравнениям.** – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
URL: http://elibrary.bsu.az/kitablar/846.pdf

[М] Матвеев Н.М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** – Минск: «Вышэйшая школа», 1987. djvu

Занятие № 16 | Занятие № 17

04.05.2022

Занятие № 15

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений

I. Метод исключения неизвестных

Путем исключения неизвестных система сводится к дифференциальному уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией.

№ 786 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \tag{786}$$

Выразив из первого уравнения y:

$$y = x' - 2x, \tag{786.1}$$

и подставив полученное для y выражение во второе уравнение системы, получим

$$(x'-2x)'=3x+4(x'-2x) \quad \Leftrightarrow \quad x''-6x'+5x=0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+5=0$. Его корнями будут $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$. Тогда $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$. Подставляя выражение для x в (786.1), получим $y=(C_1e^t+5C_2e^{5t})-2(C_1e^t+C_2e^{5t)})=-C_1e^t+3C_2e^{5t}$.

Ответ: $\boxed{x=C_1e^t+C_2e^{5t},\ \ y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}.}$

В матричной форме: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Домашнее задание

[Ф] №№ 787, 789.

Изучить материал по теме «Фазовый портрет ЛДС»

11.05.2022

Занятие № 16

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

№ 788 [Ф]: $\begin{cases} x'+x-8y=0, \\ y'-x-y=0. \end{cases}$ (788)

Выразив из второго уравнения x:

$$x=y'-y, \qquad (788.1)$$

и подставив полученное для x выражение в первое уравнение системы, получим

$$(y'-y)'+y'-y-8y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y''-9y=0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-9=0$. Его корнями будут $\lambda_{1,2}=\pm 3$. Тогда $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$. Подставляя выражение для y в (788.1), получим $x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}$.

Ответ: $\boxed{x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t},\ \ y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}.}$

№ 790 [Ф]: $$\begin{cases} x'=x-3y, \\ y'=3x+y. \end{cases} \tag{790}$$

Выразив из второго уравнения x:

$$x=\frac{y'-y}{3}, \tag{790.1}$$

и подставив полученное для x выражение в первое уравнение системы, получим

$$y''-2y'+10y=0.$$

Составим для полученного уравнения соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+10=0$. Его корнями будут $\lambda_{1,2}=1\pm 3i$. Тогда $y=C_1e^t\cos 3t+C_2e^t\sin 3t$. Подставляя выражение для y в (790.1), получим $x=C_2e^t\cos 3t-C_1e^t\sin 3t$.

Ответ: $\boxed{x=e^t(C_2\cos 3t-C_1\sin 3t),\ \ y=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t).}$

№ 793 [Ф]: $$\begin{cases} x'=3x-y, \\ y'=4x-y. \end{cases} \tag{793}$$

Выразив из первого уравнения y:

$$y=3x-x', \tag{793.1}$$

и подставив полученное для y выражение во второе уравнение системы, получим

$$x''-2x'+x=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корень $\lambda=1$ кратности 2. Тогда $x=C_1e^t+C_2te^t$. Подставляя выражение для x в (793.1), получим $y=e^t(2C_1-C_2+2C_2t)$.

Ответ: $\boxed{x=e^t(C_1+C_2t),\ \ y=e^t(2C_1-C_2+2C_2t).}$

№ 813 [Ф]: $$\begin{cases} x''=2x-3y, \\ y''=x-2y. \end{cases} \quad (813)$$

Выразив из второго уравнения x:

$$x=y''+2y, \quad (813.1)$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, получим

$$(y''+2y)''=2(y''+2y)-3y \quad \Leftrightarrow \quad y^{(4)}-y=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4-1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm 1$, $\lambda_{3,4}=\pm i$. Тогда $y=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$. Подставляя выражение для y в (813.1), получим $x=3C_1e^t+$ $+3C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$.

Ответ: $$\boxed{\begin{aligned} &x=3C_1e^t+3C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t, \\ &y=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t. \end{aligned}}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t+C_4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t.$$

№ 832 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = x + y + 5e^{-t}. \end{cases} \qquad (832)$$

Выразив из второго уравнения x:

$$x = y' - y - 5e^{-t}, \qquad (832.1)$$

и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, после приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}. \qquad (832.2)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$ имеет вид: $y_{одн} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$. Частное решение неоднородного уравнения (832.2) можно найти методом неопределенных коэффициентов. При этом его следует искать в виде

$$y_ч = Ae^{3t} + Be^{-t}. \qquad (832.3)$$

Подстановка выражения (832.3) в (832.2) дает:

$$-Ae^{3t} + 15Be^{-t} = 2e^{3t} - 30e^{-t} \quad \Rightarrow \quad A = -2, \quad B = -2.$$

Таким образом, получали общее решение уравнения (832.2)

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}.$$

Подставляя выражение для y в (832.1), получим $x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}$.

Ответ:
$$\boxed{\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}, \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \end{aligned}}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание

[**Ф**] №№ **814, 843.**

Подготовка к контрольной работе № **3** (часть **1**).
Примерный вариант
Контрольная работа – **25 мая**.

18.05.2022

Занятие № 17

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

№ 796 [Ф]:

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases} \tag{796}$$

Выразив из первого уравнения y:

$$y = x + z - x', \tag{796.1}$$

и подставив полученное выражение для y во второе и третье уравнения заданной системы, получим

$$\begin{cases} x'' = 2x' + z' - 2x, \\ z' = x - z + x', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 3x' - x - z, \\ z' = x - z + x'. \end{cases} \tag{796.2}$$

Выразив z из первого уравнения системы (966.2):

$$z = 3x' - x - x'', \tag{796.3}$$

из второго уравнения системы (796.2) исключим переменную z. В результате получим уравнение

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0. \qquad (796.4)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \pm 1.$ Следовательно, общим решением уравнения (796.4) будет

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t}. \qquad (796.5)$$

Подставив (796.5) в (796.3), найдем

$$z = C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 5C_3 e^{-t}. \qquad (796.6)$$

Подставив (796.5) и (796.6) в (796.1), найдем

$$y = C_2 e^t - 3C_3 e^{-t}.$$

Ответ:
$$\boxed{\begin{aligned} &x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t},\\ &y = C_2 e^t - 3C_3 e^{-t},\\ &z = C_1 e^{2t} + C_2 e^t - 5C_3 e^{-t}. \end{aligned}}$$

II. Метод Эйлера (метод собственных векторов)

Систему линейных однородных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

можно записать в векторной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t), \qquad (2)$$

где $A=(a_{ij})$ – матрица из коэффициентов системы, а $X(t)$ – вектор неизвестных функций $x_i(t)$, $\dot{X}(t)$ – вектор производных функций $x_i(t)$:

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Систему (2) можно решить **методом Эйлера**, который заключается в следующем. Решение системы (2) ищем в виде вектор-функции

$$X(t)=e^{\lambda t}h, \quad h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)^T. \tag{3}$$

Функция (3) является решением системы (2), если λ – собственное значение матрицы A, а h – собственный вектор этой матрицы, соответствующий числу λ. Найдя собственные значения λ_i матрицы A и соответствующие собственные вектора h^i, можно построить общее решение системы (2).

Правило 1. Если для каждого собственного значения количество собственных векторов равно кратности этого собственного значения, то общее решение системы дифференциальных уравнений описывается формулой

$$X(t)=C_1e^{\lambda_1 t}h^1+C_2e^{\lambda_2 t}h^2+\ldots+C_ne^{\lambda_n t}h^n. \tag{4}$$

При этом функции $X_i(t)=e^{\lambda_i t}h^i$, $i=\overline{1,\ n}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

№ 796 [Ф]:

$$\begin{cases} x'=x-y+z, \\ y'=x+y-z, \\ z'=2x-y. \end{cases} \tag{796}$$

Найдем собственные значения матрицы системы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, построив соответствующее характеристическое уравнение:

$$\left|A-\lambda E\right|=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=2.$$

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор, решая уравнение $Ah^i=\lambda_i h^i$.

1) Для $\lambda_1=1$ и $h^1=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}-b+c=0,\\ a-c=0,\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}b=c,\\ a=c.\end{cases}$$

Полагая $c=1$, получим $h^1=(1,\ 1,\ 1)^T$.

2) Для $\lambda_2=-1$ и $h^2=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2a-b+c=0,\\ 3a+b=0,\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}b=-3a,\\ c=-5a.\end{cases}$$

Полагая $a=1$, получим $h^2=(1,\ -3,\ -5)^T$.

3) Для $\lambda_3=2$ и $h^3=(a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}-a-b+c=0,\\ a-b-c=0,\\ 2a-b-2c=0,\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a=c,\\ b=0.\end{cases}$$

Полагая $c=1$, получим $h^3=(1,\ 0,\ 1)^T$.

В соответствии с правилом 1 по формуле (4) запишем общее решение заданного уравнения:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \\ C_1 e^t - 3C_2 e^{-t} \\ C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\boxed{x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \;\; y = C_1 e^t - 3C_2 e^{-t}, \;\; z = C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}.}$$

№ 798 [Ф]:
$$\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases} \qquad (798)$$

Найдем собственные значения матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, построив соответствующее характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 2, \; \lambda_3 = 3.$$

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор, решая уравнение $Ah^i = \lambda_i h^i$.

1) Для $\lambda_1 = 1$ и $h^1 = (a, \; b, \; c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b + c = 0, \\ a + b - c = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0, \\ c = b. \end{cases}$$

Полагая $b = 1$, получим $h^1 = (0, \; 1, \; 1)^T$.

2) Для $\lambda_2 = 2$ и $h^2 = (a, \; b, \; c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -b + c = 0, \\ a - c = 0, \\ a - b = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = c, \\ b = c. \end{cases}$$

Полагая $c = 1$, получим $h^2 = (1,\ 1,\ 1)^T$.

3) Для $\lambda_3 = 3$ и $h^3 = (a,\ b,\ c)^T$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a - b + c = 0, \\ a - b - c = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0, \\ a = c. \end{cases}$$

Полагая $c = 1$, получим $h^3 = (1,\ 0,\ 1)^T$.

В соответствии с правилом 1 по формуле (4) запишем общее решение заданного уравнения:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boxed{x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t},\ \ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t},\ \ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}.}$

Домашнее задание

[Ф] № 799